

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

APPLICATIONS A LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS D'UNE SOLUTION EXACTE DE CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES OPÉRATORIELLES

Par A. VISCONTI ⁽¹⁾,

The Physical Laboratories. The University Manchester.

Sommaire. — On étudie dans les premiers paragraphes un certain nombre de propriétés des équations linéaires dans l'espace de Hilbert : définition et propriétés de la résolvante, principes variationnels, etc. Chacun de ces paragraphes comporte des applications à des problèmes quantiques.

On obtient ensuite une solution du type de Fredholm qu'on applique, en outre, au problème de la diffusion des particules par un champ extérieur. Enfin cette méthode est généralisée et mise en connection avec certaines méthodes de sommation de séries divergentes; puis elle est appliquée à l'étude de la convergence de la matrice S en théorie quantique des champs.

Introduction. — Une partie de ce travail est consacrée au développement d'une Note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences [17c] sur une solution des équations linéaires dans l'espace de Hilbert et sur certaines applications à des questions de renormalisation. Il nous a paru utile de placer les développements de cette Note dans un cadre plus complet en étudiant d'une façon systématique ces équations, tout en ayant constamment en vue les applications possibles à la Mécanique quantique.

Nous étudions dans les quatre premiers paragraphes les questions suivantes : définition de la résolvante, principes variationnels, transformations de contact, étude d'une solution (solution de la largeur de raie) dans un système de référence particulier. La théorie générale exposée dans chacun de ces paragraphes est illustrée par des applications à des problèmes de Mécanique quantique.

La suite de ce travail s'occupe essentiellement de l'étude d'une solution du type de Fredholm : c'est-à-dire d'une solution se présentant sous la forme du quotient de deux séries de puissances du paramètre. Un paragraphe est consacré à la propriété connue, mais généralement peu utilisée, des équations linéaires de l'espace de Hilbert de posséder une solution unique, mais pouvant être définie au moyen de coefficients numériques arbitraires dans

une certaine mesure. Puis transformant l'équation linéaire opératorielle considérée en un système infini d'équations algébriques du premier degré, nous obtenons une solution (très analogue à celle que Fredholm a donnée pour les équations intégrales) dans laquelle ces coefficients numériques prennent, des valeurs bien déterminées données en fonction des traces de l'opérateur noyau \mathcal{K} . Les formules ainsi obtenues s'appliquent, en particulier, aux équations intégrales à noyau nombre- c : elles se réduisent dans ce cas aux formules de Ple-melj [13]. Enfin nous étudions dans les trois paragraphes suivants : la transformation de Cayley de la résolvante qui permet d'obtenir des approximations unitaires; le problème de la diffusion d'une particule par un champ extérieur donné et enfin l'équation linéaire homogène et sa solution. Le problème de la diffusion d'une particule ayant été déjà étudié par Abdus Salam et P. T. Matthews ⁽²⁾ [2], nous nous sommes limité à quelques considérations sur la normalisation des probabilités, telle qu'elle a été faite par R. P. Feynman [4] au moyen des diagrammes boucles (closed loops).

Le dixième paragraphe est consacré à une application plus poussée de la méthode des coefficients indéterminés : nous obtenons ainsi des conditions

⁽¹⁾ Chargé de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, Institut H. Poincaré, Paris.

⁽²⁾ Notre étude est, en fait, indépendante de celle de ces auteurs dont nous ignorons les travaux au moment de la rédaction de la Note [17c].

d'existence et d'unicité de la solution au moyen de conditions de sommabilité de Nörlund de la série des approximations successives. Puis la méthode ainsi élaborée est appliquée à l'étude de la convergence de la matrice $S^{(2)}$. Les procédés de renormalisation ont pour but, comme il est bien connu, de rendre finis tous les termes du développement de la matrice S en série de puissances de la constante de couplage; ces procédés n'ont donc d'énoncé précis que dans le cadre du calcul de l'opérateur $S(t)$ [équ. (11.1) de ce travail] par approximations successives. Lorsque tous les termes de cette série ont été ainsi rendus finis, la série elle-même peut être convergente ou divergente. Si la convergence résout entièrement le problème, on ne peut pas dire que la divergence de cette série exclut automatiquement l'existence d'une solution : elle peut tout aussi bien indiquer que, pour la valeur utilisée de la constante de couplage, le développement employé cesse d'être adéquat. Le critère que nous proposons peut précisément permettre de délimiter les types de divergences de la série des approximations successives en lui donnant comme somme, au sens de Nörlund, la solution de l'équation à résoudre. Ce critère semble donc mieux adapté à la théorie quantique des champs que certains critères classiques : il peut, en effet, paraître quelque peu artificiel de chercher à donner des conditions portant sur le noyau de l'équation intégrale de départ [noyau $H(t)$ de l'équation (11.1)] quand chacun des termes de la série des approximations successives doit être modifié tellement profondément par la suite.

Finalement, il s'agit de décider si les séries divergentes qu'on rencontre en théorie quantique des champs peuvent ou non définir une solution suivant la méthode proposée. Il est malheureusement très difficile de donner des résultats définitifs : ces résultats dépendent, en effet, du comportement des diverses approximations successives qui — même pour le cas de l'électromagnétisme — est très mal connu. Néanmoins nous basant sur certains travaux [8], [12], [16] portant sur des modèles quantiques simples, nous pouvons conclure que certainement dans les cas envisagés, probablement pour l'électromagnétisme, la série de la matrice S est toujours divergente. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous étudions l'application d'autres méthodes de sommation, en reliant ces méthodes au caractère asymptotique de la série des approximations successives.

Les conclusions de ce dernier paragraphe, comme aussi celles de la remarque qui le suit, ne prétendent

(*) J. Hamilton [6] a directement étudié, par une méthode très différente de la nôtre, l'équation de l'opérateur $S(t)$ [équ. (11.1) de ce travail]. Nos conclusions au total concordent avec les siennes. Nous tenons à le remercier pour des remarques qui nous ont été utiles pour la mise au point des paragraphes 10 et 11.

pas être exhaustives, mais tendent à définir les directions possibles suivant lesquelles on pourrait espérer trouver des solutions.

1. Généralités sur les équations linéaires.

La résolvante. — Considérons l'équation linéaire opératorielle :

$$U = U_0 + \lambda \mathcal{K} U \quad (1.1a)$$

ou bien :

$$U = U_0 + \lambda U \mathcal{K}; \quad (1.1b)$$

U_0 et \mathcal{K} (opérateur noyau) sont des opérateurs connus, U l'opérateur inconnu et λ un paramètre réel ou complexe. Les opérateurs — en vue des applications à la Mécanique quantique — appartiennent à l'espace de Hilbert. L'existence et l'unicité de la solution seront caractérisés plus loin (cf. § 11) à partir du type de divergence de la série des approximations successives. Pour l'instant, nous nous intéresserons à certains résultats indépendants des développements en séries. On peut définir un opérateur résolvant $\mathcal{R}(\lambda)$ tel que :

$$U = [1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda)] U_0, \quad (1.2a)$$

$$U = U_0 [1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda)]. \quad (1.2b)$$

Il est facile de vérifier en portant (1.2) dans (1.1) ou (1.1) dans (1.2) que \mathcal{R} satisfait aux deux équations :

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{K} + \lambda \mathcal{K} \mathcal{R}(\lambda), \quad (1.3)$$

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{K} + \lambda \mathcal{R}(\lambda) \mathcal{K}, \quad (1.4)$$

d'où l'on déduit

$$[\mathcal{R}(\lambda), \mathcal{K}] = 0. \quad (1.5)$$

La résolution de (1.1) est donc ramenée au calcul d'un opérateur ne dépendant plus que du noyau \mathcal{K} et non de U_0 . De plus, dans tous les cas où $1 - \lambda \mathcal{K}$ admet un inverse, on a

$$1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda) = (1 - \lambda \mathcal{K})^{-1}. \quad (1.6)$$

En fait, le problème à étudier en Mécanique quantique est plus compliqué par suite de l'intervention d'un second paramètre E que l'on peut le plus souvent identifier à l'énergie totale. L'équation (1.1) doit être remplacée par

$$U(\lambda, E) = U_0(E) + \lambda \mathcal{K}(E) U(\lambda, E) \quad (1.7)$$

de telle sorte que les valeurs propres de λ (constante de couplage) sont fonction de E et qu'inversement à un choix donné de λ correspond une suite de valeurs de E qui sont valeurs propres.

Par exemple, si l'on considère un système quantique d'hamiltonien total

$$g H(t) = H_1(t) + g H_2(t),$$

l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$ du système est régi par le système d'équations [17 c]

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}_1(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t H_1(t') \mathcal{U}_1(t', t_0) dt', \\ \mathcal{U}(t, t_0) &= \mathcal{U}_1(t, t_0) \\ &\quad - i g \int_{t_0}^t \mathcal{U}_1(t, t') H_2(t') \mathcal{U}(t', t_0) dt', \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

les opérateurs noyaux sont dans ce cas les opérateurs intégraux

$$-i \int_{t_0}^t dt' H_1(t') \{ \}$$

et

$$-i \int_{t_0}^t dt' \mathcal{U}_1(t, t') H_2(t') \{ \}.$$

Dans un formalisme de matrice S [17 b], t_0 est renvoyé à $-\infty$ et en prenant la transformée de Fourier par rapport au paramètre t , on est amené à considérer :

$$\begin{aligned} u(E, g) &= 2\pi \delta_+(E - H_0) \\ &\quad - 2i\pi \delta_+(E - H_0) H' u(E, g), \end{aligned} \quad (1.9)$$

Les lettres minuscules représentent les opérateurs transformés de Fourier et on a supposé que l'hamiltonien H_0 des particules libres et celui d'interaction H' sont indépendants de t . Dans ce cas l'opérateur noyau est un opérateur usuel

$$-2i\pi \delta(E - H_0) H'$$

et la position des points singuliers de $u(E, g)$ dépend des deux paramètres g et E , ce qui complique évidemment la structure du spectre des valeurs propres.

A titre de deuxième exemple, nous pouvons considérer l'équation régissant l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}(a, b; t, t_0)$ de deux particules a, b interagissant par un potentiel $H'(t)$. Si l'on considère la solution de l'équation [17 a]

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) &= \mathcal{U}_0(t^a - t_0^a) \mathcal{U}_0(t^b - t_0^b) \\ &\quad - i \int_{t_0^a}^{t^a} d\tau^a \int_{t_0^b}^{t^b} d\tau^b \mathcal{U}_0(t^a - \tau^a) \mathcal{U}_0(t^b - \tau^b) \\ &\quad \times H_1(\tau^a, \tau^b) \mathcal{U}(\tau^a, \tau^b; t_0^a, t_0^b), \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec

$$H_1(t^a, t^b) = H'(t^a) \delta(t^a - t^b). \quad (1.11)$$

On peut voir que l'on a

$$\lim_{\substack{t^a = t^b = t \\ t_0^a = t_0^b = t_0}} \mathcal{U}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) = \mathcal{U}(a, b; t, t_0). \quad (1.12)$$

L'opérateur noyau est dans ce cas l'opérateur intégral

$$\begin{aligned} &-i \int_{t_0^a}^{t^a} d\tau^a \int_{t_0^b}^{t^b} d\tau^b \mathcal{U}_0(t^a - \tau^a) \\ &\quad \times \mathcal{U}_0(t^b - \tau^b) H_1(\tau^a, \tau^b) \{ \} \end{aligned}$$

portant sur les deux variables τ^a et τ^b . Si l'on se place en représentation x et si l'on représente par $K(3, 4; 1, 2)$, K_+^a , K_+^b les noyaux des opérateurs intégraux correspondant à \mathcal{U} et \mathcal{U}_0 [K_+ correspond à l'interprétation de Feynmann des antiparticules et permet de considérer des limites infinies dans l'équation (1.13)], on obtient une équation formellement identique à celle de Bethe-Salpeter :

$$\begin{aligned} K(3, 4; 1, 2) &= K_+^a(3, 1) K_+^b(4, 2) \\ &\quad + i \int K_+^a(3, 5) K_+^b(4, 6) G(5, 6; 7, 8) K(7, 8, 1, 2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

les intégrations sont faites sur les variables deux fois répétées et

$$G(5, 6; 7, 8) = H'(5) \delta(5, 7) \delta(6, 8). \quad (1.14)$$

Il est évident que l'interprétation de l'équation (1.14) et de l'expression généralisée de G par la théorie quantique des champs reste un problème délicat.

2. Principes variationnels pour \mathcal{U} et \mathcal{R} . — Considérons l'opérateur Ω défini comme suit

$$\Omega = \mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K} U) - \mathcal{K} U. \quad (2.1)$$

En faisant varier indépendamment U et \mathcal{R} , on obtient

$$\begin{aligned} \Delta \Omega &= \Delta \mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K} U) \\ &\quad + (\mathcal{R} - \lambda \mathcal{R} \mathcal{K} - \mathcal{K}) \Delta U. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Écrivant que la variation $\Delta \Omega$ est nulle quelles que soient les variations arbitraires $\Delta \mathcal{R}$ et ΔU , on obtient l'équation (1.1), sa résolvante (1.4) et la relation

$$\Omega_{st} = -\mathcal{K} U. \quad (2.3)$$

l'indice st signifiant « stationnaire ». Dans le cadre de la Mécanique quantique, l'équation (2.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega(t, t_0) &= \int_{t_0}^t dt' \left\{ \mathcal{R}(t, t') \right. \\ &\quad \times \left[\mathcal{U}(t' - t_0) - \mathcal{U}_0(t' - t_0) \right. \\ &\quad \left. + i g \int_{t_0}^{t'} \mathcal{U}_0(t' - \tau) H'(\tau) \mathcal{U}(\tau, t_0) d\tau \right] \\ &\quad \left. - i g \mathcal{U}_0(t - t') H'(t') \mathcal{U}(t', t_0) \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

et il est facile de vérifier que les éléments de matrice de Ω stationnaire donnent directement les amplitudes de transition [17 b].

Il est intéressant d'obtenir des principes variationnels portant sur des nombres- c et non des opérateurs. Supposons d'abord que la trace de l'opérateur Ω existe

$$\omega \equiv \text{Tr } \Omega \equiv \sum_n \langle n | \Omega | n \rangle, \quad (2.5)$$

on a alors

$$\omega = \text{Tr} \{ \mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K} U) - \mathcal{K} U \}. \quad (2.6)$$

Écrivons la variation $\Delta\omega$ en explicitant la trace, on a

$$\Delta\omega = \sum_{n, n'} \langle n | \Delta \mathcal{R} | n' \rangle \langle n' | U - U_0 - \lambda \mathcal{K} U | n \rangle + \sum_{n, n'} \langle n | \mathcal{R} - \lambda \mathcal{R} \mathcal{K} - \mathcal{K} | n' \rangle \langle n' | \Delta U | n \rangle. \quad (2.7)$$

Les nombres $-c \langle n | \Delta \mathcal{R} | n' \rangle$ et $\langle n | \Delta U | n' \rangle$ peuvent être arbitrairement choisis de sorte que par un raisonnement courant en calcul des variations, on conclut

$$\begin{aligned} \langle n' | U - U_0 - \lambda \mathcal{K} U | n \rangle &= 0, \\ \langle n | \mathcal{R} - \lambda \mathcal{R} \mathcal{K} - \mathcal{K} | n' \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\langle n' |$ et $| n \rangle$ sont des vecteurs quelconques d'un système orthogonal complet, on a donc bien (1.1) et (1.4).

Supposons en second lieu que ω soit divergent : $\langle I |$ et $| o \rangle$ étant deux vecteurs tels que $\langle I | \Omega | o \rangle$, a un sens (état final et initial en Mécanique quantique), considérons le nombre

$$\begin{aligned} T_{10} &= \langle I | \Omega | o \rangle \\ &= \langle I | \mathcal{R}(U - U_0 - \lambda \mathcal{K} U) - \mathcal{K} U | o \rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

d'où la variation

$$\begin{aligned} \Delta T_{10} &= \sum_n \langle I | \Delta \mathcal{R} | n \rangle \langle n | U - U_0 - \lambda \mathcal{K} U | o \rangle \\ &+ \sum_{n'} \langle I | \mathcal{R} - \lambda \mathcal{R} \mathcal{K} - \mathcal{K} | n' \rangle \langle n' | \Delta U | o \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Posons alors

$$U_0 | o \rangle = | \Phi_0 \rangle, \quad U_0 | o \rangle = | \Psi \rangle \quad (2.11)$$

(Φ et Φ_0 représentent évidemment les vecteurs d'état du système total et des particules libres en Mécanique quantique), on obtient les équations :

$$\begin{aligned} | \Psi \rangle &= | \Phi_0 \rangle + \lambda \mathcal{K} | \Psi \rangle, \\ \langle I | \mathcal{R} &= \langle I | \mathcal{K} + \lambda \langle I | \mathcal{K} \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ces équations sont moins générales que les équations (1.1) et (1.4), car elles intéressent uniquement des vecteurs bien déterminés de l'espace de Hilbert. Pour les applications à la Mécanique quantique, on se reportera à l'article déjà cité [17 b] où ce problème est étudié de façon assez détaillée.

3. Les transformations de contact de l'équation linéaire. — L'équation (1.1) est covariante pour toute transformation canonique

$$U = S^{-1} U' S$$

et devient

$$U' = S U_0 S^{-1} + \lambda (S \mathcal{K} S^{-1}) U'. \quad (3.4)$$

Les exemples de ce type de transformation sont nombreux en Mécanique quantique, par exemple la représentation d'interaction fait correspondre à $\mathcal{U}(t, t_0)$

$$\mathcal{U}^{\text{int}}(t, t_0) = \mathcal{U}_0^{-1}(t) \mathcal{U}(t, t_0) \mathcal{U}_0(t_0). \quad (3.2)$$

Il est, peut-être utile de noter que la forme opératorielle (1.11) de l'équation de Bethe-Salpeter prend une forme simple dans une représentation d'interaction généralisée. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\text{int}}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) \\ = \mathcal{U}_0^{-1}(t^a) \mathcal{U}_0^{-1}(t^b) \mathcal{U}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) \mathcal{U}_0(t^a) \mathcal{U}_0(t^b), \end{aligned} \quad (3.3)$$

on voit immédiatement que \mathcal{U}^{int} satisfait à l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\text{int}}(t^a, t^b; t_0^a, t_0^b) \\ = 1 - i \int_{t_0^a}^{t^a} d\tau_a \\ \times \int_{t_0^b}^{t^b} d\tau_b H_1^{\text{int}}(\tau_a, \tau_b) \mathcal{U}^{\text{int}}(\tau_a, \tau_b; t_0^a, t_0^b), \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned} H_1^{\text{int}}(t^a, t^b) \\ = \mathcal{U}_0^{-1}(t^a) \mathcal{U}_0^{-1}(t^b) H_1(t^a, t^b) \mathcal{U}_0(t^a) \mathcal{U}_0(t^b), \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'intérêt de ces transformations réside en partie dans le fait qu'elles permettent de simplifier le noyau d'une équation opératorielle lorsqu'il est somme de deux noyau

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 \quad (3.6)$$

et que la solution U_1 de l'équation relative au noyau \mathcal{K}_1 est connue

$$U_1 = 1 + \lambda \mathcal{K}_1 U_1. \quad (3.7)$$

Considérons la solution de (1.1) par approximations successives : à l'intérieur du domaine de convergence de cette série et à l'extérieur de ce domaine par prolongement analytique de la fonction U de λ , on a

$$\begin{aligned} U &= (1 - \lambda \mathcal{K}_1 - \lambda \mathcal{K}_2)^{-1} U_0 \\ &= [(1 - \lambda \mathcal{K}_1)(1 - \lambda(1 - \lambda \mathcal{K}_1)^{-1} \mathcal{K}_2)]^{-1} U_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

et par application du théorème sur l'inverse d'un produit

$$U = [1 - \lambda(1 - \lambda \mathcal{K}_1)^{-1} \mathcal{K}_2]^{-1} (1 - \lambda \mathcal{K}_1)^{-1} U_0. \quad (3.9)$$

On transforme (3.9) d'après l'expression (3.7) de U_1

$$U = (1 - \lambda U_1 \mathcal{K}_2)^{-1} U_1 U_0, \quad (3.10)$$

de sorte que finalement on obtient

$$U = U_1 U_0 + \lambda U_1 \mathcal{K}_2 U, \quad (3.11)$$

équation qui par multiplication gauche et droite respectivement par U_1^{-1} et U_1 donne l'équation du transformé canonique;

$$U' = U_1^{-1} U U_1.$$

Les applications de cette transformation sont nom-

breuses; considérons comme premier exemple l'équation de l'opérateur d'évolution d'un système d'hamiltonien; $H_1(t) + (H_2(t)$, cet opérateur obéit à l'équation

$$\mathcal{U}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t [H_1(t') + H_2(t')] \mathcal{U}(t', t_0) dt' \quad (3.12)$$

qui peut se mettre sous la forme du système d'équations intégrales (1.8) par application des formules (3.7) et (3.11).

Considérons comme deuxième exemple le cas où l'hamiltonien est celui de l'électromagnétisme, on a

$$\begin{aligned} H_1(t) + H_2(t) \\ = -ie \int \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu \psi(\mathbf{x}, t) A_\mu(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \\ - c^2 \delta m \int \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Définissons l'opérateur $V(t, t_0)$ solution de l'équation

$$\begin{aligned} V(t, t_0) = 1 - \delta m c^2 \\ \times \int_{t_0}^t dt' \int \bar{\psi}(\mathbf{x}, t') \psi(\mathbf{x}, t') d^3\mathbf{x} V(t', t_0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

alors l'opérateur du système matière plus rayonnement obéit à l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, t_0) = V(t, t_0) - ie \int_{t_0}^t dt' V(t, t') \\ \times \int \bar{\psi}(\mathbf{x}, t') \gamma_\mu \psi(\mathbf{x}, t') A_\mu(\mathbf{x}, t') d^3\mathbf{x} U(t', t_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

La transformation unitaire (3.1) engendrée par $V(t)$, tel que

$$V(t, t_0) = V(t) V^{-1}(t_0),$$

inclut dans l'opérateur d'évolution la correction de masse : résultat classiquement démontré par Schwinger de façon plus compliquée.

4. Une solution pour un système d'axes particulier : la solution du type d'amortissement. — On peut se proposer de chercher une solution de la forme :

$$U = (1 + \rho) \Lambda, \quad (4.1)$$

avec Λ différent de U_0 . Il est facile de prévoir qu'on n'obtiendra ce faisant aucun avantage, sauf dans le cas très particulier où l'on spécifie que le système orthonormal complet choisi comme base est celui des vecteurs propres de U_0 . On a alors une solution, qui bien qu'elle ne soit définie que pour ce seul système de référence, permet d'obtenir en Mécanique quantique la solution de la « damping theory » sous la forme, par exemple, que lui ont donné Arnous et Zienau [1]. Le choix de ce système de référence permet de décomposer chaque opérateur A en deux opérateurs : le premier n'ayant

que des éléments diagonaux A_d , le deuxième des éléments non diagonaux $A_{n,d}$

$$A = A_d + A_{n,d}. \quad (4.2)$$

Nous allons faire les hypothèses de départ (que nos calculs confirmeront) : Λ est un opérateur diagonal alors que ρ est un opérateur non diagonal.

Bien qu'il soit plus expéditif de porter directement (4.1) dans l'équation (1.1), nous allons rattacher, cette solution à la résolvante (1.3) et (1.4) pour des raisons d'unité d'exposition.

Utilisant (1.2), on a

$$U = U_0 + \lambda \mathcal{R} U_0 = U_0 + \lambda \mathcal{R}_d U_0 + \lambda \mathcal{R}_{n,d} U_0$$

identifiant avec (4.1), il vient

$$\Lambda = (1 + \lambda \mathcal{R}_d) U_0, \quad (4.3a)$$

$$\rho \Lambda = \lambda \mathcal{R}_{n,d} U_0, \quad (4.3b)$$

d'où

$$\rho = \frac{\lambda \mathcal{R}_{n,d}}{1 + \lambda \mathcal{R}_d}. \quad (4.4)$$

Ces expressions résolvent en effet le problème, mais on peut voir qu'en Mécanique quantique elles conduisent à des formes indéterminées et qu'il est utile d'exprimer Λ en fonction de ρ et ρ en fonction de \mathcal{K} . Pour cela nous décomposons l'équation de la résolvante (1.3) en deux

$$\mathcal{R}_d = \mathcal{K}_d + \lambda \mathcal{K}_d \mathcal{R}_d + \lambda (\mathcal{K}_{n,d} \mathcal{R}_{n,d})_d, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{R}_{n,d} = \mathcal{K}_{n,d} + \lambda \mathcal{K}_d \mathcal{R}_{n,d} + \lambda \mathcal{K}_{n,d} \mathcal{R}_d + \lambda (\mathcal{K}_{n,d} \mathcal{R}_{n,d})_{n,d}. \quad (4.6)$$

Tirons \mathcal{R}_d de (4.5) en utilisant le fait que $1 - \lambda \mathcal{K}_d$ est diagonal, donc possède un inverse, et portons cette expression dans (4.3 a)

$$\Lambda = [1 + \lambda^2 (\mathcal{K}_{n,d} \mathcal{R}_{n,d})_d] \frac{U_0}{1 - \lambda \mathcal{K}_d}. \quad (4.7)$$

Si nous introduisons dans (4.7) l'expression de $\mathcal{R}_{n,d} = \lambda^{-1} \rho \Lambda U_0^{-1}$ tirée de (4.3 b), nous obtenons une équation en Λ

$$\Lambda = U_0 + \lambda (\mathcal{K} + \mathcal{K}_{n,d} \rho)_d \Lambda \quad (4.8)$$

qui se résout immédiatement puisque tous les opérateurs sont diagonaux

$$\Lambda = \frac{U_0}{1 + \lambda [\mathcal{K} + \mathcal{K}_{n,d} \rho]_d}. \quad (4.9)$$

En introduisant ρ dans (4.6), on obtient facilement

$$\rho = \lambda [\mathcal{K} + \mathcal{K}_\rho]_{n,d}. \quad (4.10)$$

En Mécanique quantique, l'équation (1.9) donne

$$\begin{aligned} U_0 &= 2\pi \delta_+(E - H_0); \\ \mathcal{K} &= -2i\pi \delta_+(E - H_0) H'; \quad \lambda = g. \end{aligned}$$

Une simple application de la formule (4.9) montre que

$$\Lambda = \frac{2\pi \delta_+(E - H_0)}{1 - 2i\pi g \delta_+(E - H_0) (H' + H' \rho)_d},$$

expression qui peut encore s'écrire

$$\Lambda = \frac{i}{E - H_0 - g(H' + H'\rho)_d}.$$

L'opérateur largeur de raie est alors proportionnel à

$$g(H' + H'\rho)_{n,d}.$$

On voit enfin que ρ satisfait à l'équation de Heitler

$$\rho = 2i\pi g\delta_+(E - H_0)(H' + H'\rho)_{n,d}.$$

Il n'y a aucune difficulté à retrouver les formules que nous avons précédemment données [17 b] lorsque H' dépend du temps (4).

5. La solution par coefficients indéterminés.

— Revenons à la solution de (1.1) au moyen de la résolvante (1.2). Considérons un opérateur :

$$\mathcal{O}(\lambda) = \sum_n \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1}, \quad (3.1)$$

où les \mathcal{O}_n sont des opérateurs indépendants de λ , et un nombre $cD(\lambda)$

$$D(\lambda) = \sum_n \frac{(-\lambda)^n}{n!} D_n. \quad (3.2)$$

Ces deux séries sont pour l'instant purement formelles. Cherchons à représenter $\mathcal{R}(\lambda)$ par le quotient de l'opérateur $\mathcal{O}(\lambda)$ par le nombre $cD(\lambda)$

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\mathcal{O}(\lambda)}{D(\lambda)}. \quad (3.3)$$

En portant (5.3) dans l'équation (1.3) de la résolvante, il est facile de voir que l'on obtient la relation de récurrence

$$\mathcal{O}_{n+1} = D_n \mathcal{K} - n \mathcal{K} \mathcal{O}_n \quad (3.4)$$

qui montre que les \mathcal{O}_n sont univoquement déterminés par le choix des D_n qui restent arbitraires. Cette même formule permet d'ailleurs d'exprimer D_n en fonction de D_0, \dots , et des puissances de 1 à n de \mathcal{K} : on trouvera plus loin (6.8) cette expression.

Si donc l'équation (1.1) admet une solution unique dans un certain domaine de λ (les conditions d'unicité seront précises au paragraphe 10) et si l'on peut trouver un ensemble de nombre D_n tels que (5.1) et (5.2) soient tous deux convergents dans ce domaine de λ , on aura de ce fait déterminé la solution de (1.1).

(4) Pour obtenir les résultats sous la forme donnée par Arnous et Zienau, il faut poser

$$\rho = -2i\pi\delta_+(E - H_0)U,$$

où U représente l'opérateur défini par ces auteurs : opérateur sans éléments dangereux dans le système des vecteurs propres de H_0 . Nous tenons à remercier E. Arnous pour d'utiles discussions autour de ces questions.

Le cas $D_0 = D_n = 0$ pour $n \neq 1$ donne la solution par approximations successives

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_n \lambda_n \mathcal{K}^{n+1}; \quad (3.5)$$

ce cas montre d'ailleurs qu'il ne suffit pas que l'une des deux séries (dans ce cas celle du dénominateur) soit une série entière pour que l'on ait une solution valant quel que soit : On doit aussi noter que si les séries (5.1), (5.2) et (5.5) sont à la fois toutes convergentes, une simple application du théorème de Cauchy sur la multiplication des séries montre que

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\mathcal{O}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{D(\lambda) \sum \lambda^n \mathcal{K}^{n+1}}{D(\lambda)} = \sum \lambda^n \mathcal{K}^{n+1}. \quad (3.6)$$

Néanmoins le cas particulièrement intéressant, celui qui peut *a priori* apporter un élargissement dans la définition de la solution de (1.1), est celui où les deux séries (5.1), (5.2) étant divergentes, $\mathcal{R}(\lambda)$ quotient de deux séries divergentes, possède quand même une limite. Avant d'examiner ce point, nous allons étudier le cas où en utilisant des hypothèses assez restrictives sur \mathcal{K} : en supposant par exemple que \mathcal{K} est un opérateur complètement continu, on peut former un opérateur $\mathcal{R}(\lambda)$ quotient de deux séries convergentes.

6. La solution du type de Fredholm. — La méthode de Volterra et Fredholm [18], pour la solution d'une équation intégrale consiste à remplacer cette équation par un système d'équations algébriques du premier degré, d'écrire explicitement la solution de ce système par la règle de Cramer et de chercher la limite de cette solution lorsque le nombre d'équations de ce système tend vers l'infini. C'est une méthode analogue que nous allons employer et qui permettra de construire la fonction méromorphe en λ solution de (1.1).

Soit un système orthogonal complet $|n\rangle$ et $|o\rangle$ un vecteur arbitraire, la solution de (1.1) est ramenée par projection sur les divers vecteurs de ce système à la solution de

$$\sum_n (\delta_{mn} - \lambda \langle m | \mathcal{K} | n \rangle \langle n | U | o \rangle) = \langle m | U_0 | o \rangle \quad (6.1)$$

dont la solution est le quotient de deux séries de puissances en λ . Le dénominateur s'écrit, d'après la règle de Cramer, sous la forme d'un déterminant qui admet comme développement de Taylor ([18], p. 223, form. (3) et sq.)

$$\begin{aligned} & \| \delta_{mn} - \lambda \langle m | \mathcal{K} | n \rangle \| \\ &= 1 - \lambda \sum_{N_1} \langle N_1 | \mathcal{K} | N_1 \rangle \\ &+ \frac{(-\lambda)^2}{2!} \sum_{N_1, N_2} \left| \begin{array}{cc} \langle N_1 | \mathcal{K} | N_1 \rangle & \langle N_1 | \mathcal{K} | N_2 \rangle \\ \langle N_2 | \mathcal{K} | N_1 \rangle & \langle N_2 | \mathcal{K} | N_2 \rangle \end{array} \right| + \dots \\ &= \sum_n \frac{(-\lambda)^n}{n!} D_n. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Il semble d'après cette expression que le dénominateur dépende du choix de la base $|n\rangle$: nous allons montrer qu'il est, en fait, indépendant en prouvant que les D_n sont donnés en fonction des

traces de K_1, K^2, \dots . Mais auparavant, considérons le numérateur pour l'inconnue $\langle I | U | 0 \rangle \langle I |$ étant un des vecteurs de la base choisie. Soit $\langle I | D(\lambda) | 0 \rangle$ ce numérateur, il est toujours donné par la même règle de Cramer [(13, p. 225 et sq.) sous la forme :

$$\langle I | \mathcal{D}(\lambda) | 0 \rangle = \langle I | U_0 | 0 \rangle D(\lambda) + \lambda \left\{ \sum_{N_1} \langle I | \mathcal{K} | N_1 \rangle \langle N_1 | U_0 | 0 \rangle - \lambda \sum_{N_1, N_2} \left| \frac{\langle I | \mathcal{K} | N_1 \rangle \langle I | \mathcal{K} | N_2 \rangle}{\langle N_2 | \mathcal{K} | N_1 \rangle \langle N_2 | \mathcal{K} | N_2 \rangle} \right| \langle N_1 | U_0 | 0 \rangle + \dots \right\} \quad (6.3)$$

en faisant rentrer chacun des facteurs dans la déterminant qu'il multiplie, on a finalement

$$\begin{aligned} \langle I | \mathcal{D}(\lambda) | 0 \rangle &= \langle I | U_0 | 0 \rangle D(\lambda) + \lambda \left\{ \langle I | \mathcal{K} U_0 | 0 \rangle - \lambda \sum_{N_1} \left| \frac{\langle I | \mathcal{K} U_0 | 0 \rangle \langle I | \mathcal{K} U_0 | N_1 \rangle}{\langle N_1 | \mathcal{K} U_0 | 0 \rangle \langle N_1 | \mathcal{K} U_0 | N_1 \rangle} \right| + \dots \right\} \\ &= \langle I | U_0 + \lambda \sum_{n=0} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{D}_{n+1} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ces formules écrites, revenons au dénominateur ; on vérifie que chacun des déterminants formant $D(\lambda)$ est de la forme générale :

$$|B_{N_1}; A_{N_2} \dots A_{N_n}| = \begin{vmatrix} B_{N_1 N_1} & B_{N_1 N_2} & \dots & B_{N_1 N_n} \\ A_{N_2 N_1} & A_{N_2 N_2} & \dots & A_{N_2 N_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N_n N_1} & A_{N_n N_2} & \dots & A_{N_n N_n} \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

et que ces déterminants vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \sum_{N_1 \dots N_n} |B_{N_1}; A_{N_2} \dots A_{N_n}| \\ = \sum_{N_1 \dots N_{n-1}} |A_{N_1} \dots A_{N_{n-1}}| \text{Tr } B \\ - (n-1) \sum (AB)_{N_1}; A_{N_2} \dots A_{N_n}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

avec

$$\text{Tr } A = \sum_{N_1} \langle N_1 | A | N_1 \rangle$$

invariant indépendant du choix du système $|N\rangle$. Appliquant cette relation de récurrence aux divers déterminants entrant dans le développement (6.2), on trouve aisément la formule de récurrence

$$D_n = (n-1)! \sum_{v=1}^n (-1)^{v+1} \frac{D_{n-v}}{n-v!} \text{Tr } \mathcal{K}^v, \quad D_0 = 1 \quad (6.7)$$

Ainsi donc le dénominateur se trouve exprimé en fonction des traces des diverses puissances de \mathcal{K} . Le calcul du numérateur peut se faire soit par l'application de (5.4) avec le choix (6.7) pour les D_n , soit encore en formulant pour les \mathcal{D}_n définis par (6.4) une relation de récurrence analogue à (6.5). L'une

et l'autre méthode conduisent après quelques calculs à (*)

$$\mathcal{D}_n = (n-1)! \sum_{v=1}^n (-1)^{v+1} \frac{D_{n-v}}{n-v!} \mathcal{K}^v. \quad (6.8)$$

En comparant avec (6.7), on tire :

$$D_n = \text{Tr } \mathcal{D}_n, \quad (6.9)$$

ce qui réduit finalement le calcul à l'évaluation des \mathcal{D}_n successifs et à leurs traces.

Finalement, dans l'expression de

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\mathcal{D}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\sum_a \frac{(-\lambda)^a}{a!} \mathcal{D}_{a+1}}{\sum_0 \frac{(-\lambda)^a}{a!} D_a}, \quad (6.10)$$

la détermination des D_n et \mathcal{D}_n successifs est assurée

(*) Les trois premiers termes de $\mathcal{D}(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont explicitement donnés par P. M. Morse et H. Feshbach ([10], p. 1023, form. (9 1, 6.1), ouvrage publié postérieurement à [17 c]). Il est d'ailleurs très intéressant de rapprocher le point de vue de ces auteurs du nôtre : M. et F. supposent dès le début que les seuls points singuliers de la solution sont des pôles et ils se proposent de déterminer leur fonction $\chi(\lambda)$ [qui n'est autre que notre $D(\lambda)$] de telle sorte qu'elle ait pour zéros les pôles de la solution. Cette unique condition laisse une certaine indépendance dans le choix de $\chi(\lambda)$: un des choix les plus simples consiste à poser :

$$\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \text{Tr} \{ \mathcal{K} (1 - \lambda \mathcal{K})^{-1} \}.$$

Leur méthode est sensiblement plus compliquée que celle que nous employons et les formules qu'ils obtiennent moins maniables. Remarquons que les pôles à l'encontre des points singuliers essentiels et des points de branchement sont des points d'unicité (singuliers) de la solution.

soit par (6.8) et (6.9), soit par la relation de récurrence (5.4)

$$\mathcal{O}_{n+1} = \mathcal{K} \text{Tr} \mathcal{O}_n - n \mathcal{K} \mathcal{O}_n \quad (6.11)$$

combinée avec (6.9).

Considérons pour donner une première application de ces formules une équation du type de celles que l'on rencontre en théorie des collisions

$$U(t) = U_0(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t, t') U(t') dt', \quad (6.12)$$

où $\mathcal{F}(t, t')$ est un opérateur des paramètres t et t' : cette équation est évidemment une équation intégrale essentiellement différente de celles considérées par Fredholm : l'opérateur \mathcal{K} est dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{F}(t, \tau) \{ \}$$

et le calcul des nombres- c D_n se fait par l'intermédiaire des nombres- c

$$\text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \} \right\},$$

$$\text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \}^{(2)} \right\}, \quad \dots$$

Soit φ_n un système orthogonal complet formant le domaine de définition des opérateurs, $\delta(t-t')$ représente alors un autre système complet pour les fonctions de variables t et t' de telle sorte que l'équation (6.12) est définie dans l'espace sous-tendu par le système orthogonal complet : $\varphi_n \delta(t-t')$. Par suite

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \} \right\} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_n \langle \varphi_n \delta(t-t') \\ \times \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{F}(t, \tau) \{ \} \right| \varphi_n \delta(t-t') \rangle \\ = \sum_n \langle \varphi_n \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t, t) dt \right| \varphi_n \rangle \end{aligned} \quad (6.13)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t, t') \{ \}^{(2)} \right\} \\ = \sum_n \langle \varphi_n \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t, \tau_2) \mathcal{F}(\tau_2, t) d\tau_2 dt \right| \varphi_n \rangle. \end{aligned}$$

Ces formules permettent le calcul du dénominateur, pour le numérateur on remarquera que chacun des opérateurs \mathcal{O}_n est un opérateur intégral

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n = (n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{F}(t, \tau) \{ \}^\nu \end{aligned} \quad (6.14)$$

de noyau opératoirel

$$(n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt_\nu \dots dt_2 \mathcal{F}(t, t_\nu) \dots \mathcal{F}(t_2, \tau). \quad (6.15)$$

$\mathcal{O}(\lambda)$ est donc lui-même un opérateur intégral.

On peut aisément vérifier que lorsque $\mathcal{F}(t, \tau)$ est un nombre- c , la formule (6.12) est alors une équation intégrale usuelle, les formules (6.9), (6.10), (6.11) peuvent se ramener aux formules de Plémelj [13] et [15]. Nous démontrerons enfin au paragraphe 11 que si une ou plusieurs traces sont infinies, les formules obtenues sont valables en remplaçant les traces infinies par des zéros.

7. Transformation de Cayley de la résolvante. — Nous allons faire correspondre à l'opérateur $\mathcal{R}(\lambda)$ un opérateur \mathcal{A} (qui en Mécanique quantique est l'opérateur réactance de Schwinger) au moyen de la transformation de Cayley

$$1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda) = \frac{1 - \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}{1 + \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}, \quad (7.1)$$

d'où

$$U = \frac{1 - \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}{1 + \frac{i}{2} \mathcal{A}(\lambda)}. \quad (7.2)$$

On sait que cette transformation jouit de la propriété de faire correspondre à l'opérateur hermitien $\lambda \mathcal{A}$ un opérateur unitaire $1 + \lambda \mathcal{R}(\lambda)$ et inversement. Elle va nous permettre de résoudre un problème important en Mécanique quantique : obtenir une méthode de perturbations — suivant le schéma de Fredholm — unitaire à chacune de ses approximations. Il convient de remarquer tout d'abord, que s'il est facile de donner des conditions suffisantes pour que la solution de (1.1) soit hermitique (par exemple si U_0 et $\lambda \mathcal{K}$ sont hermitiens, il suffit : $[\mathcal{K}, U_0] = 0$), le problème de son unitarité est beaucoup plus difficile. Cette unitarité lorsque U_0 est lui-même unitaire s'exprime, comme on peut le voir au moyen de la résolvante

$$(\lambda \mathcal{R})^+ + \lambda \mathcal{R} + |\lambda|^2 \mathcal{R}^+ \mathcal{R} = 0, \quad (7.3)$$

mais cette formule est d'un maniement difficile. En Mécanique quantique le problème est heureusement plus aisé à étudier : on vérifie, par exemple, facilement l'unitarité de $S(t)$ en représentation d'interaction [équ. (11.1)] en cherchant l'équation différentielle à laquelle cet opérateur obéit. Le problème se complique d'ailleurs quand on considère $S = S(+\infty)$. Nous allons donc supposer dans (1.1) U et U_0 unitaires, il s'ensuit que $1 + \lambda \mathcal{R}$, l'est aussi. Considérons la solution (6.10) comme

une solution approchée, c'est-à-dire arrêtons le développement du numérateur et du dénominateur à la puissance λ^n : la solution ainsi obtenue cesse généralement d'être unitaire.

Considérons, d'autre part, l'opérateur \mathcal{A} , il satisfait en vertu de sa définition (7.1) à l'équation

$$\mathcal{A}(\lambda) = i\mathcal{R} - \frac{\lambda}{2} \mathcal{R} \mathcal{A}. \quad (7.4)$$

Pour U unitaire, $\lambda\mathcal{A}$ est hermitien ainsi que toutes ces itérées de sorte que tirant $\lambda\mathcal{A}$ à une approximation quelconque de cette équation et portant dans (7.1), nous aurons obtenu ainsi une solution approchée unitaire. Il est facile de donner le développement de $\lambda\mathcal{A}$ en fonction des opérateurs \mathcal{O}_n et des nombres D_n , écrivons

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{\sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \alpha_{n+1}}{\sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} A_n}, \quad (7.5)$$

α_n étant des opérateurs, A_n des nombres indépendants tous deux de λ . Portant (6.10) et (7.5) en (7.4), on obtient :

$$\alpha(\lambda) D(\lambda) = i\mathcal{O}(\lambda) \mathcal{A}(\lambda) - \frac{\lambda}{2} \mathcal{O}(\lambda) \alpha(\lambda).$$

Développant chacun des opérateurs suivant les puissances de λ et égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de λ , il vient la formule de récurrence assez compliquée

$$\frac{\alpha_{p+1}}{p!} = i \sum_{v=0}^p \frac{A_{p-v}}{p-v!} \frac{\mathcal{O}_{v+1}}{v!} + \sum_{\rho=1}^p \left\{ \frac{1}{2} \frac{\mathcal{O}_{p+1-\rho}}{p-\rho!} - \frac{D_{p+1-\rho}}{p+1-\rho!} \right\} \frac{\alpha_\rho}{\rho-1!}, \quad (7.6)$$

les coefficients A_n demeurent indéterminées, mais assujettis à rendre $\mathcal{A}(\lambda)$ convergent. On peut vérifier que dans la mesure où un développement en série de puissances de $\mathcal{R}(\lambda)$ et de $\mathcal{A}(\lambda)$ est possible, c'est-à-dire dans la mesure où l'on peut poser

$$D_0 = A_0 = 1, \quad D_n = A_n = 0 \quad (n \neq 1),$$

les formules se simplifient et donnent

$$\alpha_1 = i\mathcal{K}, \quad \alpha_2 = \frac{i}{2} \mathcal{K}^2, \quad \dots$$

Il est enfin utile de signaler une propriété basée toujours sur l'hermiticité de $\lambda\mathcal{A}$. Écrivons après multiplication par λ l'équation (7.4) ainsi que son adjointe; ajoutons et retranchons les équations ainsi obtenues

$$\lambda\mathcal{A} = (-\lambda\mathcal{R})_{ah} - \frac{1}{2} (\lambda\mathcal{R})_h \lambda\mathcal{A},$$

$$(\lambda\mathcal{R})_h = \frac{1}{2} (\lambda\mathcal{R})_{ah} \lambda\mathcal{A}$$

en remarquant que \mathcal{A} commute avec \mathcal{R} et en désignant comme on le fait habituellement

$$\mathcal{A}_h = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^+}{2}, \quad \mathcal{A}_{ah} = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}^+}{2i}.$$

Éliminant $\lambda(\mathcal{R})_h$ entre ces deux équations, on obtient

$$(\lambda\mathcal{A}) = (-\lambda\mathcal{R})_{ah} - \frac{\lambda}{2} (\lambda\mathcal{R})_{ah} \lambda\mathcal{A}. \quad (7.7)$$

Cette dernière relation met en évidence une propriété importante de l'opérateur $\lambda\mathcal{A}$: cet opérateur ne dépend que de la partie antihermitienne de l'opérateur $\lambda\mathcal{R}$. Cette propriété est utile en théorie de la matrice S : elle a été signalée par J. Schwinger, S. N. Gupta, etc. et est employée pour simplifier certains calculs de sections efficaces.

8. Application à la diffusion d'une particule par un champ extérieur donné. — Ce problème a été étudié de façon très complète par A. Salam et P. T. Matthews [2]. Ils ont envisagé le cas d'un champ de fermions quantifiés en interaction avec un champ extérieur donné dépendant du temps. Ils ont montré en utilisant certains résultats de F. Smithies [15], que pour l'ensemble des champs considérés en Physique — champs différent de 0 dans un domaine fini d'espace-temps — la solution du problème existe et est unique.

Nous ne reviendrons pas sur ce problème, mais nous allons considérer un problème connexe : le problème du vide tel qu'il a été posé par R. P. Feynman dans sa théorie du positon ([4], p. 756) où l'on définit particule et antiparticule suivant que l'on se trouve suivre le cours du temps ou bien le remonter. Soient ψ le spineur fonction d'ondes du fermion, posons :

$$\mathcal{C}(x) = e^{\gamma_\mu A_\mu(x)}$$

où A_μ représente le quadrivecteur potentiel du champ extérieur donné. On sait que $\psi(x)$ satisfait à l'équation intégrale

$$\psi(2) = \psi_0(2) - ie \int K_{+}(2, 1) \mathcal{C}(1) \psi(1) dV_1, \quad (8.1)$$

$\psi_0(2)$ est la fonction d'ondes du fermion libre, $K_{+}(2, 1)$ une fonction de Green (propagateur) particulière de l'équation d'ondes du fermion libre (la fonction S_F en notation habituelle), dV_1 un élément de volume spatio-temporel autour du point x_1 . L'opérateur intégral a ici pour expression

$$\mathcal{K} = \int dV_1 K_{+}(2, 1) \mathcal{C}(1) \{ \}. \quad (8.2)$$

La densité intégrale $\mathcal{R}(2, 1)$ de la résolvante

$$\mathcal{R}(2) = \int dV_1 \mathcal{R}(2, 1) \{ \} \quad (8.3)$$

satisfait en vertu de (1.4) à l'équation

$$\mathcal{R}(2, 1) = K_+(2, 1)\mathcal{A}(1) - ie \int K_+(2, 3)\mathcal{A}(3)\mathcal{R}(3, 1) dV_3 \quad (8.4)$$

et donne la solution de (8.1) sous la forme

$$\psi(2) = \psi_0(2) - ie \int \mathcal{R}(2, 1)\psi_0(1) dV_1. \quad (8.5)$$

D'autre part, en vertu des formules (6.8) et (6.10) on a

$$\mathcal{R}(2, 1) = \frac{\sum \frac{(ie)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1}(2, 1)}{\sum \frac{(ie)^n}{n!} D_n}, \quad (8.6)$$

avec [cf. (6.15) et (6.16)]

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(2, 1) &= (n-1)! \sum_{\nu=1} (-1)^{\nu-1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \\ &\times \int dV_{\nu'} \dots dV_1 K_+(2, \nu') \\ &\times \mathcal{A}(\nu') K_+(\nu', \nu'-1) \dots K_+(\nu', 1') \mathcal{A}(1') \delta(1, 1') \end{aligned} \quad (8.7)$$

et

$$D_n = \text{Tr} \left\{ \int dV_1 \mathcal{O}_n(2, 1) \{ \} \right\} \quad (8.8)$$

Ainsi donc les termes entrant dans l'expression des nombres D_n sont formés à l'aide des nombres

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\equiv \text{Tr } \mathcal{K}^2 \\ &= \int dV_2 dV_1 \text{tr} \{ K_+(2, 1) \mathcal{A}(1) K_+(1, 2) \mathcal{A}(2) \}, \\ \sigma_3 &\equiv \text{Tr } \mathcal{K}^3 \\ &= \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (8.9)$$

où le symbole tr indique la trace portant sur l'indice spinoriel des spineurs entrant dans l'intégrant. On peut voir en reprenant textuellement un raisonnement de Feynman ([14], p. 756, note g) ou bien en ayant recours au théorème de Furry que

$$\text{Tr } \mathcal{K}^{2n+1} = 0. \quad (8.10)$$

De plus les graphes relatifs à chacun des termes (8.9) sont des polygones fermés à $2n$ sommets, c'est-à-dire représentent n créations et n annihilations successives de paires et correspondent à la polarisation du vide. Il convient de remarquer que σ_2 correspondant à la boucle formée par deux fermions est infini : cela ne représente qu'une difficulté apparente, il suffit suivant une méthode remontant à Poincaré (cf. § 10, Remarque 2) de le remplacer par 0. En combinant (8.7) et (8.8), on obtient finalement

$$D_n = (n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \sigma_\nu$$

qui permet le calcul des D_n par récurrence à partir

de $D_0 = 1$. Dans le cas où, vu la grandeur de la constante de couplage, la série des approximations successives est convergente, on a en vertu de (8.8) :

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \exp \left[-\text{Tr} \sum \frac{(-ie)^n}{n} \mathcal{K}^n \right] \\ &= \exp \left[-\sum \frac{(-ie)^n}{n} \sigma_n \right] = \exp -L. \end{aligned}$$

Cette dernière relation peut être interprétée très simplement en termes de boucles fermées ([4, p. 756]) et montre que $D(\lambda)$, facteur de renormalisation, donne la probabilité pour que le vide reste vide.

9. L'équation homogène. — On sait que lorsque pour $\lambda = \lambda' : D(\lambda') = 0$; l'équation non homogène (1.1) ne peut avoir de solution, nous nous proposons d'étudier pour cette valeur de λ les solutions de l'équation homogène en suivant d'ailleurs que possible la marche classique en théorie des équations intégrales. Considérons la dérivée d'ordre N de $D(\lambda)$. On a en vertu de (6.9)

$$\begin{aligned} \frac{d^N D(\lambda)}{d\lambda^N} &= \text{Tr} \frac{d^N}{d\lambda^N} \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_n \\ &= (-1)^N \text{Tr} \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+N} \\ &= (-1)^N \text{Tr } \Delta_N(\lambda) \end{aligned} \quad (9.1)$$

et nous définissons les nouveaux opérateurs

$$\Delta_N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+N}. \quad (9.2)$$

On voit en particulier que

$$\text{Tr } \Delta_0(\lambda) = D(\lambda), \quad \Delta_1(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda). \quad (9.3)$$

Considérons, d'autre part, $\Delta_N(\lambda)$; on peut par application de la formule (5.4) le mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta_N(\lambda) &\equiv \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+N} \\ &= \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} [\mathcal{K} D_{n+N-1} - (n+N-1) \mathcal{K} \mathcal{O}_{n+N-1}]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Utilisant de nouveau $D_n = \text{Tr } \mathcal{O}_n$, on a après quelques calculs simples

$$\Delta_N(\lambda) = \text{Tr } \Delta_{N-1}(\lambda) \cdot \mathcal{K} - (N-1) \mathcal{K} \Delta_{N-1} + \lambda \mathcal{K} \Delta_N. \quad (9.5)$$

Cette dernière formule permet de résoudre l'équation homogène : en effet, soit $\lambda = \lambda'$ une racine multiple d'ordre α de $D(\lambda) = 0$, alors

$$\left. \frac{d^\alpha}{d\lambda^\alpha} D(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda'} = (-1)^\alpha \text{Tr } \Delta_\alpha(\lambda')$$

n'est pas nul et l'on peut trouver un entier $0 < m \leq \alpha$ tel que $\Delta_m(\lambda')$ ne soit pas identiquement nul, alors que $\Delta_1(\lambda'), \dots, \Delta_{m-1}(\lambda')$ le sont. La relation (9.5) s'écrit alors

$$\Delta_m(\lambda') = \lambda \mathcal{K} \Delta_m(\lambda') \quad (9.6)$$

$\Delta_m(\lambda')$ est donc une solution de l'équation homo-

gène. Signalons pour finir une formule bien connue, si l'on fait $N = 1$ et si l'on suppose que λ est suffisamment petit pour que la série des approximations successives ait un sens, on peut combinant (9.1) et (5.6) écrire

$$\frac{d}{d\lambda} D(\lambda) = -\text{Tr } \mathcal{O}(\lambda) = D(\lambda) \text{Tr} \sum \lambda^n \mathcal{K}^{n+1}, \quad (9.7)$$

d'où

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \exp \left[-\text{Tr} \sum_1 \frac{(\lambda)^n}{n!} \mathcal{K}^n \right] \\ &= \exp [-\text{Tr} \log (1 - \lambda \mathcal{K})]. \end{aligned} \quad (9.8)$$

M. Neumann a appliqué cette théorie à la déduction de l'équation de Bethe-Salpeter [11], nous ne reviendrons pas sur ce point. Pour le calcul par approximations successives des fonctions et valeurs propres, on se reportera à Morse et Feshbach ([10], p. 1018).

10. Généralisation de la méthode de Fredholm. — Il est facile de voir que si l'on fait un choix arbitraire des nombres c_n , la formule (5.4) permet toujours d'écrire l'opérateur \mathcal{O}_n sous la forme (6.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n &= (n-1)! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \frac{D_{n-\nu}}{n-\nu!} \mathcal{K}^\nu \\ &= (n-1)! \sum_{\rho=0}^{n-1} (-1)^{n-\rho} \frac{D_\rho}{\rho!} \mathcal{K}^{n-\rho}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

où les D_n , nombres arbitraires, sont uniquement assujettis à rendre convergents numérateur et dénominateur de $\mathcal{R}(\lambda)$ qui s'écrit en utilisant (6.10)

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N, N' \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N \lambda^n \sum_0^n (-1)^\rho \frac{D_\rho}{\rho!} \mathcal{K}^{n+1-\rho}}{\sum_0^{N'} (-\lambda)^n \frac{D_n}{n!}}. \quad (10.2)$$

On peut espérer élargir la définition de $\mathcal{R}(\lambda)$ en prenant $N = N'$, ce qui permet d'inclure le cas où numérateur et dénominateur sont divergents quand on les considère séparément, mais ont un rapport fini. Pour avoir des expressions plus compactes, posons

$$d_n = (-\lambda)^n \frac{D_n}{n!}, \quad K = \lambda \mathcal{K}, \quad (10.3)$$

définissons aussi les opérateurs s_n sommes partielles de la série des approximations successives

$$s_n = \sum_{\nu=1}^n \lambda^\nu \mathcal{K}^\nu = \sum_{\nu=1}^n K^\nu.$$

Écrivons alors le numérateur de (10.2) en mettant

en facteur les coefficients d_0, d_1, \dots, d_N ; il est facile de voir que l'on obtient

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N d_{N-\nu} s_{\nu+1}}{\sum_0^N d_\nu}. \quad (10.4)$$

ou en prenant les éléments de matrice

$$\begin{aligned} \langle I | \mathcal{R}(\lambda) | 0 \rangle &= \left\{ \frac{d_0 \langle I | s_{N+1} | 0 \rangle + d_1 \langle I | s_N | 0 \rangle + \dots}{d_0 + d_1 + \dots + d_N} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d_0 \langle I | s_{N+1} | 0 \rangle + d_1 \langle I | s_N | 0 \rangle + \dots}{d_0 + d_1 + \dots + d_N} \right\}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

D'après la définition même des moyennes de Nörlund ⁽⁶⁾, on a le théorème

La somme de Nörlund — quand elle existe — de la série des approximations successives fournit une solution du problème.

Le problème de l'unicité de la solution de l'équation (1.1) est évidemment lié au problème de la consistance de la méthode de Nörlund : si plusieurs ensembles de nombres d_n permettent de sommer la série des approximations successives, les sommes ainsi obtenues sont-elles toutes identiques ? Il est bien connu (et nous esquissons une démonstration plus loin) que la consistance de cette méthode est une conséquence de sa régularité, qui est assurée si la sommation peut être faite à l'aide de coefficients satisfaisant aux égalités [9] :

$$\left| \sum_0^m d_\nu \right| \leq \sum_0^m |d_\nu| \leq H \left| \sum_0^m d_\nu \right| \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (10.6)$$

avec H indépendant de m et si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_{m-n}}{\sum_0^m d_\nu} = 0. \quad (10.7)$$

⁽⁶⁾ Rappelons brièvement que, étant donné une série : $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ divergente, de sommes partielles S_0, S_1, \dots et un ensemble de nombres p_0, p_1, \dots , on dit que cette série est sommable au sens de Nörlund si :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_N s_0 p_{N-1} s_1 + \dots + p_0 s_N}{p_0 + \dots + p_N}$$

existe. Une méthode de sommation est dite régulière si appliquée à une série convergente, elle permet d'obtenir la somme de cette série. Si, de plus, cette méthode de sommation dépend de certains paramètres arbitraires, elle est dite consistante si la somme qu'elle permet d'obtenir à partir d'une série divergente est indépendante du choix de ces paramètres. Les conditions, de consistance et de régularité de la méthode de Nörlund sont données dans le courant du texte (pour une étude détaillée, cf. [7]). On sait enfin que la méthode de Cesaro, particulièrement bien étudiée, est un cas particulier de la méthode de Nörlund.

Des deux inégalités en (10.6), il est évident que seule celle de droite introduit une restriction sur les d_n , de plus la deuxième condition (10.7) lorsque Σd_n tend vers l'infini peut être remplacée par

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_m}{m} = 0. \quad (10.8)$$

$$\sum_n d_n$$

Le lien entre les conditions de régularité et de consistance est assuré par le théorème de Voronoï (la démonstration donnée par L. Hardy dans [7], p. 65, th. 18, doit être légèrement généralisée afin de pouvoir tirer tout le parti possible des conditions (10.6) et (10.7) plus générales que celles qu'il donne). Ce théorème permet de conclure que si la série des approximations successives est sommable par une méthode régulière de Nörlund pour la valeur $\lambda = \lambda'$ du paramètre : cette série a un rayon de convergence non nul, la fonction qu'elle représente est méromorphe dans un cercle de rayon $|\lambda'|$ et tend vers la somme de Nörlund lorsque λ s'approche de λ' en restant intérieur à ce cercle; ce dernier point établit précisément la consistance de la méthode. Ce même théorème fait apparaître quand on considère une équation intégrale ordinaire les relations entre la méthode de Fredholm et la solution par sommation : il montre que cette dernière méthode inclut la méthode de Fredholm.

Remarque 1. — Revenons à la formule (10.4); il est souvent utile de présenter cette formule comme une pondération de la série des approximations successives : on voit, en effet, que (10.4) peut s'écrire de façon légèrement différente

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{d_0 + \dots + d_N} \times \left[\lambda \mathcal{K} \sum_0^N d_n + \lambda^2 \mathcal{K}^2 \sum_0^{N-1} d_n + \dots + \lambda^{N+1} \mathcal{K}^{N+1} d_0 \right]. \quad (10.9)$$

Posons alors

$$\varpi_{p,N}(\lambda) = \frac{d_0 + \dots + d_p}{d_0 + \dots + d_N} = \frac{\sum_0^p \frac{(-\lambda)^p}{p!} D_p}{\sum_0^N \frac{(-\lambda)^p}{p!} D_p}; \quad (10.10)$$

$\varpi_{p,N}(\lambda)$ sont des fonctions rationnelles de λ dont le degré p du numérateur est inférieur ou égal au degré N du dénominateur. La résolvante se met sous la forme

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^N \varpi_{N-\nu,N}(\lambda) \lambda^{\nu+1} \mathcal{K}^{\nu+1}. \quad (10.11)$$

Les conditions de régularités (9.6) et (9.7) s'écrivent alors

$$\sum_{j=0}^N |\varpi_{j,N}(\lambda) - \varpi_{j-1,N}(\lambda)| < H \left| \sum_0^N \varpi_{j,N}(\lambda) - \varpi_{j-1,N}(\lambda) \right|, \quad (10.12)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \varpi_{N-n,N}(\lambda) - \varpi_{N-n-1,N}(\lambda) \} = 0. \quad (10.13)$$

Remarque 2. — Cette même technique des coefficients indéterminés permet l'élimination des traces infinies (en supposant qu'il n'en existe qu'un nombre fini pour la méthode de Fredholm) et fonde l'extension de la méthode de Poincaré : il suffit, en effet, de remplacer chacune de ces traces par 0.

11. Application de la méthode de Fredholm généralisée à l'étude de la convergence de la matrice S . — Nous considérons le problème de la matrice S tel qu'il a été posé dans l'introduction. Soit donc un système physique décrit par l'hamiltonien

$$g H(t) = g \int \mathcal{H}(\vec{x}, t) d^3 \mathbf{x} \quad (11.1)$$

en représentation d'interaction. La matrice S sera solution du système

$$\left. \begin{aligned} S(t) &= 1 - ig \int_{-\infty}^t H(t') S(t') dt', \\ S &= 1 - ig \int_{-\infty}^{+\infty} H(t') S(t') dt'. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Cherchons la solution de la première équation (11.2) à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, \mathcal{K} est dans ce cas l'opérateur intégral

$$\mathcal{K} = \int_{-\infty}^t d\tau H(\tau) \{ \dots \}.$$

Il en est de même pour les opérateurs $\mathcal{R}(\lambda)$, $\mathcal{O}(\lambda)$ que nous écrirons $\mathcal{O}(ig, t)$ et des coefficients $\mathcal{O}_n(t)$ de $\mathcal{O}(\lambda)$. Nous aurons de plus

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - ig \frac{\mathcal{O}(-ig, t)}{\mathcal{O}(-ig)} i \\ &= 1 - \frac{ig}{\mathcal{O}(-ig)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \mathcal{O}_{n+1}(t) i. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Par, une simple application de la formule (10.1) chacun des coefficients s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{n+1}(t) i &= n! \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+t} \frac{D_{n-\nu+1}}{n-\nu+1!} \\ &\times \int_{-\infty}^t d\tau_\nu \dots \int_{-\infty}^{\tau_2} d\tau_1 H(\tau_\nu) \dots H(\tau_1), \end{aligned} \quad (11.4)$$

portant ces expressions dans la deuxième équation

tions (11.2), on est amené à calculer les intégrales

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dt H(t) \mathcal{O}_{n+1}(t) \mathbf{1} \\ &= \sum_{v=1}^{n+1} (-1)^{v+1} \frac{n!}{n-v+1!} D_{n-v+1} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t d\tau_v \dots \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_1 H(t) \dots H(\tau_1) \\ &= \sum_{v=1}^{n+1} (-1)^{v+1} \frac{D_{n-v+1}}{n-v+1!} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t d\tau_v \dots \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_1 P[H(t) \dots H(\tau_1)], \quad (11.5) \end{aligned}$$

où P désigne l'opérateur d'ordination chronologique. Considérons pour fixer les idées un problème de diffusion de particules. Les éléments de matrice, des intégrales multiples n'ont de sens que s'ils ont été renormalisés, désignons par

$$\mathcal{M}_n(k_1, k_0) = \langle \mathbf{1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \dots d\tau_1 P[H(\tau_n) \dots H(\tau_1)] \right| \mathbf{0} \rangle, \quad (11.6)$$

toutes renormalisations ayant été faites. \mathcal{M}_n est une fonction bien définie des vecteurs impulsion-énergie k_0 et k_1 des particules initiales et finales. En revenant à (11.2), il est facile de voir que l'élément de matrice de l'opérateur S peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{1} \left| S - \mathbf{1} + ig \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) dt \right| \mathbf{0} \rangle \\ &= \frac{1}{D(-ig)} \sum_{n=0}^{\infty} (ig)^{n+2} \sum_{\rho=0}^n (-1)^{n-\rho} \frac{D_{\rho}}{\rho!} \frac{\mathcal{M}_{n+2-\rho}}{n+2-\rho!} \quad (11.7) \end{aligned}$$

En posant comme au paragraphe précédent

$$d_n = (ig)^n \frac{D_n}{n!}, \quad M_n = (-ig)^n \frac{\mathcal{M}_n}{n!}, \quad s_n = \sum_2^n M_v,$$

on peut facilement mettre (11.7) sous la forme

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{1} \left| S - \mathbf{1} + ig \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) dt \right| \mathbf{0} \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d_0 s_{N+2} + d_1 s_{N+1} + \dots + d_N s_2}{d_0 + \dots + d_N}. \quad (11.8) \end{aligned}$$

d'où le théorème :

Si le développement en série de puissances de g de S renormalisée est, pour une certaine valeur de g , sommable au sens de Nörlund, la somme ainsi obtenue est une solution du problème.

Nous arrivons ainsi au cœur du problème qu'il faut résoudre : déterminer dans quelle mesure cette méthode peut permettre de sommer les séries de la théorie quantique des champs. En d'autres termes, il s'agit de caractériser par des conditions nécessaires et suffisantes de sommabilité au sens de Nörlund les séries auxquelles nous serons amené

à nous intéresser. Une condition nécessaire se déduit immédiatement du théorème de Voronoï énoncé à la fin du paragraphe précédent : si la série des puissances de g de l'opérateur S est sommable par une méthode régulière pour $g = g'$, il faut que cette série ait un rayon de convergence non nul et qu'elle représente une fonction méromorphe dans un cercle de rayon g' .

Il n'est évidemment pas facile d'étudier directement sur un développement la nature des singularités de la fonction définie par le prolongement analytique de cette série, mais en revanche l'étude de la convergence de ce développement, tout en restant difficile, est possible. Or, nous venons de voir que les seules séries que nous pouvons espérer sommer doivent avoir un rayon de convergence non nul. D'autre part, un certain nombre de travaux récents [8], [12], [16] faits sur un modèle simplifié de champs interagissants (en représentation d'interaction, la densité d'hamiltonien est $g[\Phi(x)]^2$, Φ étant un champ de bosons de spin 0) montrent que la série de la matrice S a un rayon de convergence strictement nul. Si donc ces conclusions pouvaient se transporter à l'électromagnétisme sans aucun correctif, la méthode précédente serait *a priori* totalement inopérante; néanmoins, il convient de remarquer que cette étude n'a pas encore été faite.

Remarque 1. — Dans quelques cas particuliers, la formule (11.8) peut permettre des sommations effectives, supposons par exemple que

$$M_n = f(n) A^n \quad (A = \text{const. positive})$$

et que $f(n)$ satisfasse à une relation de récurrence à p termes

$$\alpha_0 f(m) + \dots + \alpha_p f(m-p) = 0 \quad (\alpha_j = \text{const.}),$$

ce qui est le cas lorsque $f(h)$ est un polynôme. On peut voir que le deuxième membre de (11.8) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\left\{ \begin{aligned} & \alpha_0 f(2) A^2 + [\alpha_0 f(3) + \alpha_1 f(2)] A^3 + \dots \\ & + [\alpha_0 f(p-1) + \dots + \alpha_{p-1} f(2)] A^{p-1} \end{aligned} \right\}}{\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_p A^p}.$$

Un des cas les plus simples auxquels cette méthode peut s'appliquer est la diffusion des mésons scalaires par des nucléons infiniment lourds.

Remarque 2. — Par une marche tout à fait analogue à celle qui nous a conduit à la formule (10.11), on peut mettre la solution (11.8) sous la forme d'un développement en série suivant les puissances de la constante de couplage dans lequel chaque terme est pondéré par une fraction rationnelle et cette constante :

$$\varpi_{p,N}(g, D_n) = \frac{\sum_{v=0}^p (ig)^v \frac{D_v}{v!}}{\sum_{v=0}^p (ig)^v \frac{D_v}{v!}},$$

cette fraction doit satisfaire de plus à (10.12) et (10.13).

La solution (11.8) se met sous la forme

$$\langle 1 \left| S - 1 + i g \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) dt \right| 0 \rangle \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (-i g)^{n+2} \varpi_{N-n, N}(g, D_n) \frac{\mathfrak{M}_{n+2}}{n+2!},$$

formule qui montre que la solution proposée se déduit de la solution usuelle des perturbations en affectant d'un poids convenable les contributions des graphes de Feynman d'un même ordre.

12. Application d'autres méthodes de sommation ⁽⁷⁾. — Il est facile en examinant de plus près la méthode de résolution des équations (11.2) de voir en quoi cette méthode diffère de celle ordinairement utilisée. La première des équations (11.2) est du type de Volterra et l'on sait que pour une classe assez étendue de noyaux [5], elle admet comme solution valant pour toutes les valeurs de g , la série des approximations successives. D'autre part, les procédés de renormalisation qui interviennent dans le calcul des éléments de matrice modifient profondément la structure des termes de cette série; c'est de cette modification dont nous nous sommes efforcé de tenir compte en introduisant les coefficients indéterminés. Mais ainsi que nous venons de le voir, cette méthode, quelle que soit l'extension qu'on lui donne, est essentiellement une méthode de prolongement analytique pour des fonctions pour lesquelles le point $g = 0$ n'est pas un point singulier.

Si donc la série des perturbations a un rayon de convergence nul, il faut faire appel à d'autres méthodes tenant compte de certaines autres propriétés de la série. Dans le cas particulier de l'électromagnétisme, vu la petitesse de la constante de couplage, cette série peut être envisagée comme un développement asymptotique valant autour de $g = 0$ et ce fait est bien en accord avec le principe de correspondance [14]. On peut donc pour des problèmes de cette classe essayer une autre voie d'attaque en se proposant de trouver une méthode de sommation qui soit (si possible) :

a. Une méthode de prolongement analytique : en effet, supposons que la série des approximations successives admette un prolongement analytique, la fonction définie par ce prolongement est solution de (1.1) en vertu de la permanence des relations fonctionnelles. Cette condition assure donc le raccord entre cette méthode et les résultats des méthodes classiques;

b. Soit une méthode de sommation des séries asymptotiques, ce qui doit assurer la consistance de la méthode.

⁽⁷⁾ On se reportera également à un travail de R. Bellman [3].

On peut au moins essayer de caractériser les directions suivant lesquelles on peut espérer pouvoir donner une réponse même partielle à ces questions; mais en tous cas la réponse définitive devra dépendre du comportement des termes de S , comportement mal connu actuellement.

Considérons la série divergente de la matrice S renormalisée

$$\sum (-i g)^n \frac{\mathfrak{M}_n(k_1, k_0)}{n!} \quad (12.1)$$

et proposons-nous d'utiliser une méthode de sommation par les moments ([7], p. 81). Comme il est bien connu, on définit un ensemble de nombres

$$\mu_n = \int_0^\infty f(u) u^n du \quad (12.2)$$

de telle sorte que l'expression

$$\sum \frac{(-i g)^n}{n!} \mu_n \frac{\mathfrak{M}_n}{\mu_n} = \int_0^\infty du f(u) \sum (i g)^n u^n \frac{\mathfrak{M}_n}{\mu_n n!} \quad (12.3)$$

ait un sens et l'on s'efforce en outre, de choisir la fonction $f(u)$ de telle sorte que la série de (12.3) ait une somme connue ⁽⁸⁾.

Cette méthode est effectivement avec certaines restrictions sur les μ_n ([7], p. 84) une méthode de prolongement, mais, et c'est là un premier inconvénient, elle ne prolonge pas la série dans tout son domaine d'existence, mais uniquement dans un certain domaine dit de sommabilité dépendant du choix des μ_n .

Ainsi donc quand la série de départ a un rayon de convergence différent de 0, la méthode de sommabilité étudiée est consistante, (au moins pour certains décrits par g), mais en dehors de ce cas elle perd cette propriété.

Le remède à cette difficulté consiste à tenir compte du caractère asymptotique de la série (11.1) en faisant appel à des théorèmes tels que celui de Watson [19] qui permettent moyennant certaines conditions remplies par les coefficients et le reste de la série de trouver la méthode des moments adéquate qui donne une expression compacte dont (11.1) est le développement asymptotique ⁽⁹⁾.

L'application de cette méthode suppose la connais-

⁽⁸⁾ Avec

$$f(u) = \frac{1}{z} e^{-u} \frac{1}{z} u \frac{1-z}{z},$$

on trouve facilement :

$$\int_0^\infty dv e^{-v} \sum \frac{(-i g)^n}{n!} \frac{v^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

$z = 1$ correspond à la méthode B* de Borel.

⁽⁹⁾ Pour donner un énoncé plus précis, écrivons (11.1) sous la forme :

$$\sum_n (-i g)^n \frac{\mathfrak{M}_n}{n!} + R_N(g).$$

sance de l'ordre de grandeur de la perturbation d'ordre n : cette expression est mal connue. Indépendamment de ce point, il faut aussi remarquer que ce qui précède n'a de sens que si la constante de couplage, est suffisamment petite, ce qui semble exclure toute application aux théories mésiques.

Remarque. — Supposons que nous ayons obtenu une solution pour la valeur $g = g'$ de la constante de couplage. Nous venons de voir que les seuls points singuliers intérieurs au cercle de rayon g' ne peuvent être que des pôles. Les solutions à points singuliers essentiels et à points de branchement sont donc exclues et il est facile de voir pourquoi : en ces points la solution prend plus d'une valeur, ce qui contredit au postulat d'unicité de la solution dont nous sommes parti. Cette unicité est étroitement liée à la régularité de la méthode de Nörlund et l'on pourrait certainement étendre la classe des solutions envisagées si l'on cessait de s'astreindre à employer des méthodes de Nörlund régulières, c'est-à-dire si l'on cessait de considérer des solutions univoquement déterminées et indépendantes du choix des D_n . Si donc, on était à même de fixer pour chaque problème les coefficients D_n , qui sont essentiellement des poids pour les graphes de Feynman, par des conditions plus physiques indépendamment des conditions de régularité (10. 6), (10. 7), les limites de validité de la solution pourraient être étendues par l'inclusion des points singuliers essentiels et des points de branchement, Il resterait d'ailleurs à résoudre la question difficile de l'unicité (ou du moins du choix de la détermination conve-

nable) de la solution autour des points singuliers. En tous cas, il ne semble pas facile, ou même possible, de déduire cette signification des postulats quantiques de base.

Conclusions. — Après l'étude d'un certain nombre de propriétés des équations linéaires dans l'espace de Hilbert et de leurs solutions, nous avons développé à partir du paragraphe 5 des méthodes donnant des solutions exactes de ces équations : ces méthodes utilisent les éléments de matrice de la théorie usuelle des perturbations, mais les assemblent de façon différente en les affectant de coefficients D_n . Le choix de ces coefficients est déterminé par des considérations de sommabilité au sens de Nörlund et rend inutile le calcul des traces exigées par la méthode généralisée de Fredholm.

L'application de cette méthode à la série des perturbations de la matrice S montre que, pour certains cas relativement simples, permettant l'étude de la convergence de cette série autour du point $g = 0$, l'équation étudiée cesse d'avoir une solution même dans le cadre de la méthode précédente. Il reste le recours au caractère asymptotique de cette série, recours certainement valable pour l'électromagnétisme.

Ce travail commencé à l'Institut Henri Poincaré (Paris) sous la direction de M. le Professeur L. de Broglie a été terminé à Theoretical Physics Department Manchester University sous la direction de M. le Professeur L. Rosenfeld. Je suis heureux de pouvoir leur témoigner ma gratitude pour les avis et encouragements qu'ils n'ont cessé de me prodiguer. Mes remerciements vont également à M. le Professeur A. Lichnerowicz et à M. le Directeur de Recherches A. Proca pour l'aide qu'à titres divers ils m'ont apportée dans ce travail. Enfin, je tiens aussi à remercier M. l'Assistant-Professeur H. Umezawa pour les nombreuses et amicales discussions que nous avons eues à ce sujet.

Mon séjour à l'Université de Manchester a été rendu possible par une bourse d'échange entre le C.N.R.S. et le British Council.

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\left| \frac{\mathfrak{M}_n}{n!} \right| = O(n! \sigma^n),$$

$$|R_N(g)| < O\{(N+1)! \sigma^{N+1} g^{N+1}\} \quad (\sigma = \text{const.}),$$

la fonction génératrice de la série est donnée par la méthode B* de Borel. Par exemple, si

$$\mathfrak{M}_n = (n!)^2 A^n \quad (A \text{ const.}),$$

la fonction cherchée est :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1 - i g A u} du.$$

Manuscrit reçu le 10 avril 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ARNOUS E. et ZIENAU E. — *Helv. Phys. Acta*, 1951, **24**, 279.
- [2] SALAM A. et MATTHEWS P. T. — *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 590.
- [3] BELLMAN R. — *Duke Math. J.*, 1950, **17**, 53.
- [4] FEYNMAN R. P. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 748.
- [5] GUY R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **235**, 1194.
- [6] HAMILTON J. — *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1524.
- [7] HARDY G. H. — *Divergent Series*. Oxford, 1949.
- [8] HURST C. A. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1952, **48**, 625.
- [9] MOORE C. — *Convergence factors*.
- [10] MORSE P. M. et FESHBACH H. — *Methods of Theoretical Physics*. New York, 1953.
- [11] NEUMANN M. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 129.
- [12] PETERMAN A. — *Arch. Sc.*, 1953, **6**, 5.
- [13] PLEMELJ J. — *Mon. Math.*, 1904, **15**, 93.
- [14] ROSENFELD L. — *Physica*, 1953, **19**, 359.
- [15] SMITHIES F. — *Duke Math. J.*, 1941, **8**, 107.
- [16] THIRRING W. — *Helv. Phys. Acta*, 1953, **26**, 33.
- [17] VISCONTI A. — *Thèse*, Paris, 1953; *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 1951; *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 2489.
- [18] VOLTERRA V. et PÉRÈS J. — *Théorie générale des fonctionnelles*. Paris, 1936.
- [19] WATSON G. N. — *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1912, A, **211**, 279.

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DU SPECTRE DE N_2O SOUS GRANDE ÉPAISSEUR ENTRE 1,5 ET 2,5 μ Par G. AMAT, P. BARCHEWITZ et M^{me} M.-L. GRENIER-BESSON.

Sommaire. — Le spectre de vibration-rotation de l'oxyde azoteux entre 1,5 et 2,5 μ a été étudié sous grande épaisseur à l'aide d'une cuve à réflexions multiples. Plusieurs bandes nouvelles ont été mises en évidence et étalonnées, ce qui a permis d'entreprendre un calcul des constantes vibrationnelles de la molécule N_2O tenant compte de l'interaction de résonance.

Introduction. — L'énergie des niveaux de vibration de la molécule d'oxyde azoteux peut, en première approximation, être représentée par une formule du type :

$$G_0(v_1, v_2, v_3, l_2) = \omega_1^0 v_1 + \omega_2^0 v_2 + \omega_3^0 v_3 + x_{11} v_1^2 + x_{22} v_2^2 + x_{33} v_3^2 + x_{23} v_2 v_3 + x_{13} v_1 v_3 + x_{12} v_1 v_2 + x_{ll} l_2^2. \quad (1)$$

Cette formule n'est valable, en fait, que pour des niveaux non perturbés par une interaction de résonance anharmonique (« résonance de Fermi-Dennison ») ou pour la somme des énergies des niveaux résonants. Dans le cas de la molécule N_2O , les niveaux 1 0⁰ 0 et 0 2⁰ 0 possédant des énergies voisines et le même type de symétrie, il y a donc résonance entre les niveaux Σ^+ :

$$(p, 0^0, v_3), (p-1, 2^0, v_3), \dots, (0, 2p^0, v_3);$$

entre les niveaux Π :

$$(p, 1^1, v_3), (p-1, 3^1, v_3), \dots, (0, 2p+1^1, v_3).$$

etc...

Les niveaux de vibration de la molécule N_2O sont ainsi répartis en multiplets de résonance (ou polyades) : singulets ($p=0$), doublets ($p=1$), triplets ($p=2$), etc. Dans le spectre de vibration, on observera des séries de bandes correspondant à ces divers multiplets.

D'une manière générale, les intensités des bandes décroissent assez vite lorsque les nombres quantiques définissant les transitions augmentent.

L'énergie d'un singulet est évidemment donnée directement par la formule (1).

L'énergie d'un niveau appartenant à un multiplet d'ordre plus élevé peut être calculée en utilisant la théorie de l'interaction de résonance anharmonique. Les composantes des doublets, triplets, quadruplets, etc. seront alors obtenues comme racines d'équations algébriques (de degré 2, 3, 4, ... respectivement), dont les coefficients dépendent des énergies non perturbées G_0 et de termes d'interaction donnés par la formule [1] :

$$\begin{aligned} & \left(v_1, v_2, l_2, v_3 \left| \frac{H}{hc} \right| v_1-1, v_2+2, l_2, v_3 \right) \\ & = - \left(\frac{W}{2} \right) [(v_2+2)^2 - l_2^2]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{v_1}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Par conséquent, seules les énergies des composantes des singulets et doublets pourront être obtenues explicitement en fonction des nombres quantiques. Ainsi que nous l'avons dit, l'équation (1) reste cependant valable pour la somme des énergies des composantes d'un multiplet d'ordre quelconque. Si l'on se propose de calculer les constantes vibrationnelles figurant dans l'équation (1) et l'énergie de résonance, on ne pourra pratiquement utiliser que les niveaux appartenant à un multiplet dont toutes les composantes sont connues. Un tel calcul suppose donc que l'on ait observé un grand nombre de bandes d'absorption de la molécule.

Dans un premier travail [2] effectué en utilisant une cuve d'absorption de 150 cm de longueur, nous avons pu observer, entre 1,5 et 2,5 μ , une dizaine de bandes nouvelles de l'oxyde azoteux. La précision sur les nombres d'ondes obtenus était principalement limitée par les imperfections du système d'étalonnage et par les difficultés rencontrées dans la détermination du centre des bandes, le parcours d'absorption était insuffisant pour certaines bandes peu intenses, par ailleurs la faible luminosité du système optique utilisé (constitué par une cuve cylindrique placée entre deux lentilles) diminuait considérablement le pouvoir de résolution, en imposant l'emploi de fentes relativement larges. Après avoir perfectionné notre dispositif d'étalonnage (4) [3], nous avons repris l'étude de cette région au moyen d'une cuve à réflexions multiples.

Instrumentation. — Le spectrographe et le dispositif d'étalonnage ont été décrits précédemment [3]. La cuve à réflexions multiples est cons-

(4) Nous avons obtenu, en étudiant à l'aide de ce nouveau dispositif d'étalonnage la structure rotationnelle de la bande 2_{v₂} de N_2O , des résultats en assez bon accord avec ceux obtenus indépendamment par A. E. Douglas et C. K. Møller [4].

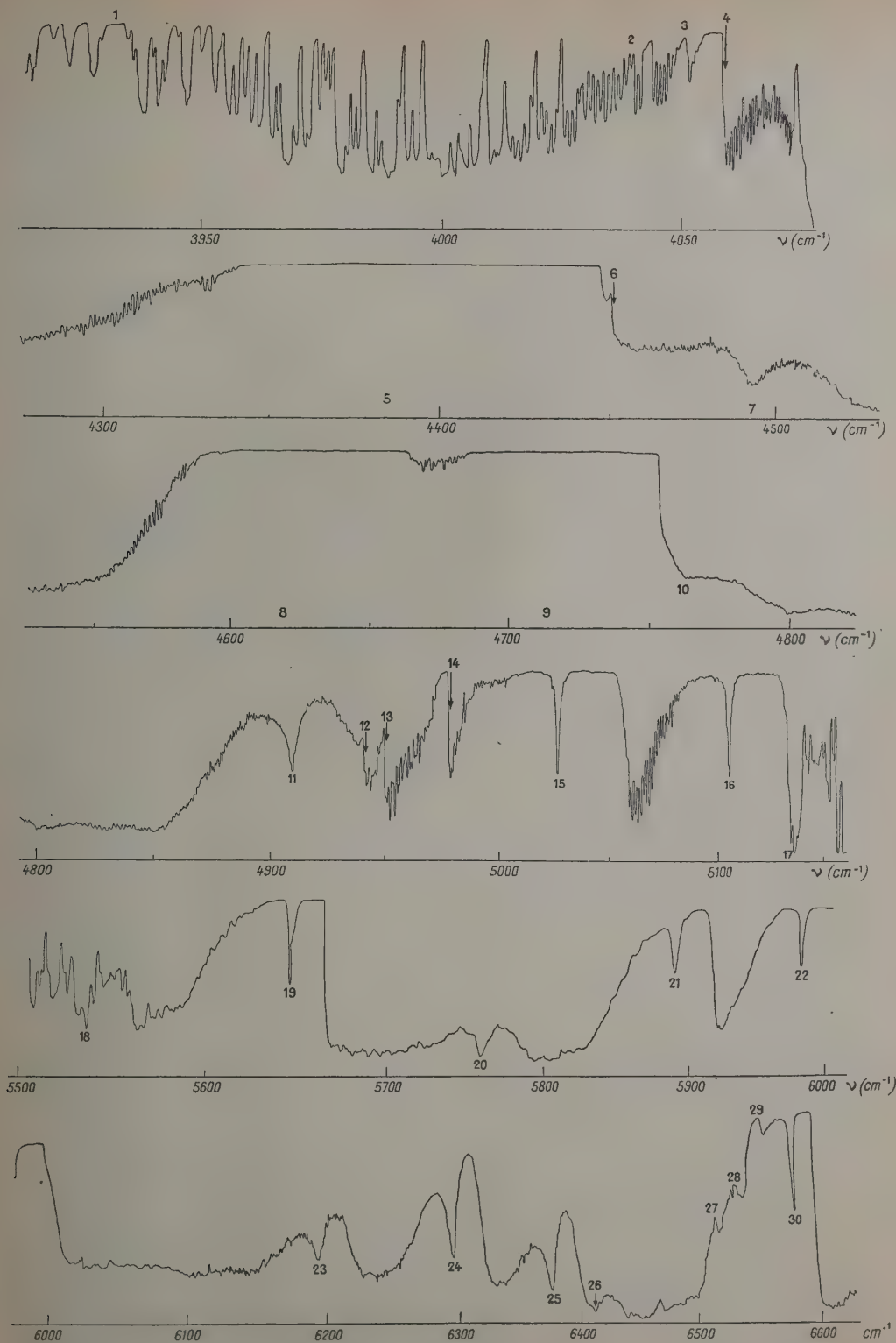


Fig. 1.

truite sur le principe de celle de White [5]. Les miroirs sphériques dorés, sont distants de 100 cm; le dispositif permet de réaliser des parcours variant de 4 en 4 m. La luminosité est suffisante pour qu'il soit possible d'utiliser, vers 2μ , des largeurs de fente de 0,04 mm, après un parcours de 80 m dans la cuve.

Pour des parcours de l'ordre de 140 m, par suite de pertes de lumière, dues principalement aux aberrations des miroirs, il est nécessaire d'utiliser des fentes plus larges.

Généralités sur le spectre de l'oxyde azoteux.

— Le spectre de l'oxyde azoteux est constitué par des séries de bandes parallèles ou perpendiculaires, chaque série correspondant aux transitions entre le niveau fondamental (type Σ^+), d'une part et les différentes composantes d'un multiplet de résonance, d'autre part. Les bandes sont parallèles si le multiplet possède le type de symétrie Σ^+ ; elles sont perpendiculaires si le multiplet possède le type de symétrie Π . Indépendamment de ces bandes (dites « bandes froides ») et correspondant à des transitions de la forme

$$0\ 0^0\ 0 \rightarrow v_1\ v_2^1\ v_3,$$

il en existe d'autres (dites « bandes chaudes ») qui correspondent à des transitions dans lesquelles le niveau le plus bas n'est plus le niveau fondamental mais un niveau excité : à la température ordinaire, ce sera toujours le niveau $0\ 1^1\ 0$ (type Π). Il existera donc, à côté de chaque bande parallèle « froide »

$$0\ 0^0\ 0 \rightarrow v_1\ 2p^0\ v_3,$$

une bande parallèle « chaude »

$$0\ 1^1\ 0 \rightarrow v_1\ 2p + 1^1\ v_3$$

de longueur d'onde très voisine (« overlapping band » correspondant à une transition $\Pi \rightarrow \Pi$).

De même, on observera à côté de chaque bande perpendiculaire « froide »

$$0\ 0^0\ 0 \rightarrow v_1\ 2p + 1^1\ v_3,$$

deux bandes perpendiculaires chaudes :

$$0\ 1^1\ 0 \rightarrow v_1\ 2p + 2^0\ v_3$$

et

$$0\ 1^1\ 0 \rightarrow v_1\ 2p + 2^2\ v_3;$$

(« overlapping bands » correspondant respectivement à des transitions $\Pi \rightarrow \Sigma^+$ et $\Pi \rightarrow \Delta$) ⁽²⁾.

⁽²⁾ Dans la suite de cet exposé, toutes les fois qu'il ne pourra pas y avoir d'ambiguïté sur la valeur de l_2 , nous désignerons les « bandes froides » par la notation

$$v_1\ v_1 + v_2\ v_2 - v_3\ v_3$$

et les « bandes chaudes » par la notation

$$v_1\ v_1 - (v_2 - 1)\ v_2 - v_3\ v_3 - v_2.$$

Il est à noter que ces bandes sont toujours d'intensité beaucoup plus faible que les « bandes froides » voisines qui les recouvrent partiellement. Leur centre est en général difficile à pointer sauf toutefois dans le cas des bandes d'overlapping perpendiculaires pour lesquelles la branche Q est toujours très apparente.

Résultats expérimentaux. — DESCRIPTION DU SPECTRE. — La figure 1 donne le spectre de N_2O sous grande épaisseur. Les quatre premiers spectres ont été réalisés sous 80 m, les deux derniers sous 140 m.

Quelques longueurs d'onde repères permettent de localiser approximativement les bandes observées.

L'interprétation de ces bandes est donnée dans le tableau I. Cette interprétation appelle les remarques suivantes :

Bande 1. — Afin d'observer la bande perpendiculaire $3\ v_2 + v_3$ ($0\ 0^0\ 0 \rightarrow 0\ 3^1\ 1$) qui se trouve dans la région d'absorption de la vapeur d'eau à $2,7\mu$, nous avons dû réaliser plusieurs spectres en faisant varier la pression de N_2O dans la cuve. La figure 2 montre les modifications de l'absorption de la vapeur d'eau et de l'oxyde azoteux, au voisinage de $3\ 930\text{ cm}^{-1}$, quand la pression de N_2O croît. Il semble que la branche Q de la bande cherchée soit sensiblement superposée à une raie peu intense du spectre de la vapeur d'eau située à $3\ 930,8\text{ cm}^{-1}$.

L'observation de la bande $3\ v_2 + v_3$ complète la connaissance du doublet de résonance $\Pi : 0\ 3^1\ 1, 2\ 1^1\ 1$. Elle est, à ce titre, particulièrement importante pour le calcul des constantes vibrationnelles.

Bandes 10, 11, 15, 16, 17. — Deux interprétations sont possibles pour cette série de bandes correspondant au quintuplet de résonance $\Sigma^+ : 0\ 8^0\ 0, 1\ 6^0\ 0, 2\ 4^0\ 0, 3\ 2^0\ 0, 4\ 0^0\ 0$. Si l'on calcule les nombres d'onde théoriques de chacune des bandes en utilisant la formule (1) ⁽³⁾ et les valeurs des constantes proposées par G. et L. Herzberg [6] et si on les compare aux nombres d'onde observés, l'interprétation des bandes est la suivante :

16.....	$4\ v_1$
13.....	$3\ v_1 + 2\ v_2$
14.....	$2\ v_1 + 4\ v_2$
10.....	$v_1 + 6\ v_2$

La bande correspondant à la composante $0\ 8^0\ 0$ du multiplet serait superposée à la bande très intense $2\ v_1 + v_3$ (bande 9).

Dans ce cas, il n'est pas possible de trouver une interprétation convenable de la bande 17 (superposée à quelques raies d'absorption de la vapeur d'eau). On peut considérer, au contraire, la bande 17

⁽³⁾ Ce calcul ne tient pas compte de l'interaction de résonance anharmonique.

TABLEAU I.

Nos	Niveau		Type de la bande.	Nombres d'onde rapportés au vide (cm ⁻¹).	Spectre de référence.	Bibliographie (bandes connues).
	inférieur.	supérieur.				
1.....	0 0 ⁰ 0	0 3 ¹ 1	⊥	3 931,8	H ₂ O	
2.....	0 1 ¹ 0	1 2 ⁰ 1	⊥	4 041,6	»	
3.....	0 1 ¹ 0	1 2 ² 1	⊥	4 053,5	»	
4.....	0 0 ⁰ 0	1 1 ¹ 1	⊥	4 062,09	»	[4]
5.....	0 0 ⁰ 0	0 0 ⁰ 2		{ 4 417,20 } { 4 417,51 }	N ₂ O 4,4μ	{ [3] } { [4] }
6.....	0 0 ⁰ 0	3 1 ¹ 0	⊥	-	»	
7.....	0 0 ⁰ 0	0 4 ⁰ 1		4 491,65	-	[4]
8.....	0 0 ⁰ 0	1 2 ⁰ 1		4 630,31	-	[4]
9.....	0 0 ⁰ 0	2 0 ⁰ 1		4 730,86	-	[4]
10.....	0 0 ⁰ 0	0 8 ⁰ 0?		-	CO ₂ 2,01μ	
11.....	0 0 ⁰ 0	1 6 ⁰ 0?		4 911,5	»	
12.....	0 1 ¹ 0	0 2 ⁰ 2	⊥	4 940,55	»	
13.....	0 1 ¹ 0	0 2 ² 2	⊥	4 949,20	»	
14.....	0 0 ⁰ 0	0 1 ¹ 2	⊥	4 977,8	»	
15.....	0 0 ⁰ 0	2 4 ⁰ 0?		5 026,2	CO ₂ 1,96μ	
16.....	0 0 ⁰ 0	3 2 ⁰ 0?		5 105,8	»	
17.....	0 0 ⁰ 0	4 0 ⁰ 0?		5 138	CO ₂ et H ₂ O	
18.....	0 0 ⁰ 0	0 2 ⁰ 2		-	-	
19.....	0 0 ⁰ 0	1 0 ⁰ 2		5 647,0	CH ₄ 3,5μ	
20.....	0 0 ⁰ 0	1 4 ⁰ 1		-	-	
21.....	0 0 ⁰ 0	2 2 ⁰ 1		5 889,7 (*)	CH ₄ 1,66μ	
22.....	0 0 ⁰ 0	3 0 ⁰ 1		5 975,7	»	
23.....	0 0 ⁰ 0	2 6 ⁰ 0		6 192,5	CO ₂ 1,65μ	
24.....	0 0 ⁰ 0	3 4 ⁰ 0		6 298,4	CO ₂ 1,60μ	
25.....	0 0 ⁰ 0	4 2 ⁰ 0		6 377,2	CO ₂ 1,57μ	
26.....	0 0 ⁰ 0	5 0 ⁰ 0		-	-	
27.....	0 1 ¹ 0	3 2 ⁰ 1	⊥	-	-	
28.....	0 1 ¹ 0	3 2 ² 1	⊥	-	-	
29.....	0 0 ⁰ 0	3 1 ¹ 1	⊥	6 555,5?	CO ₂ 1,54μ	
30.....	0 0 ⁰ 0	0 0 ⁰ 3		6 578,3?	»	

(*) Les nombres d'onde qui suivent ont été ajoutés à la correction des épreuves.

comme étant la première de la série (4 ν₁), la bande 10 correspondrait alors à la bande 8 ν₂.

La structure rotationnelle observée dans ce spectre est due à l'oxyde azoteux, mais aussi au gaz carbonique atmosphérique qui possède trois bandes d'absorption dans cette région (4 ν₂ + ν₁, ν₁ + 2 ν₂ + ν₃, 2 ν₁ + ν₃).

Bandes 27 et 28. — Il semble raisonnable de considérer ces deux bandes comme des « bandes chaudes » correspondant respectivement aux transitions



Il serait souhaitable d'étudier cette région avec une dispersion meilleure.

Étalonnage. — Parmi toutes ces bandes, certaines étaient déjà connues et étalonnées, en particulier

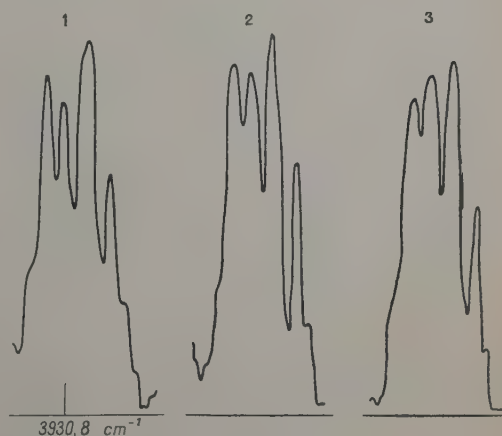


Fig. 2.

Douglas et Møller [4] ont analysé la structure rotationnelle des bandes 4, 5, 7, 8 et 9,

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \quad 2\nu_3, \quad 4\nu_2 + \nu_3,$$

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3, \quad 2\nu_1 + \nu_3,$$

et déterminé leur centre avec une excellente précision. Nous avons nous-mêmes, dans un travail antérieur, trouvé pour la bande $2\nu_3$ des résultats en assez bon accord avec ceux de ces auteurs.

Nous avons déterminé les centres des nouvelles bandes observées chaque fois que la structure du spectre et la dispersion du spectrographe permettaient de réaliser un étalonnage dans des conditions convenables. Pour chaque bande, la pression et le trajet d'absorption étaient choisis de façon à permettre le pointé du centre de bande avec la meilleure précision en utilisant, si possible, la structure fine de rotation. Nous procédons actuellement à l'étalonnage des bandes numérotées 20 à 30. Leurs positions approximatives sont données sur les figures 1. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau I. Dans la colonne 6 de ce tableau, sont notées les bandes d'absorption qui ont servi de référence lors de l'étalonnage.

Conclusion. — L'étude du spectre de l'oxyde azoteux sous grande épaisseur, l'observation d'un certain nombre de bandes nouvelles de faible inten-

sité et la détermination des fréquences propres de vibration correspondantes nous ont permis d'entreprendre le calcul des constantes vibrationnelles de cette molécule en tenant compte de l'interaction de résonance anharmonique du premier ordre existant entre les niveaux 10^00 et 02^00 [7]. Ce calcul paraît conduire aux deux constatations suivantes :

1° Ainsi que Taylor, Benedict et Strong [8] l'avaient déjà observé pour la molécule CO_2 , la théorie de l'interaction de résonance anharmonique ne semble pas, sous sa forme actuelle, conduire à des résultats en bon accord avec l'expérience. Il serait souhaitable de perfectionner cette théorie en poussant les calculs jusqu'à un ordre plus élevé.

2° Il faudrait vraisemblablement, dans le cas de la molécule N_2O , tenir compte d'autres possibilités de résonance anharmonique (en particulier entre le niveau 00^01 et les niveaux 20^00 , 12^00 , 04^00).

Étant donnée la complexité de ce problème théorique, des résultats expérimentaux plus nombreux seraient également souhaitables.

Nous remercions M. J. Laporte pour l'aide qu'il nous a apportée dans les manipulations d'étalonnage.

Manuscrit reçu le 8 juin 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] NIELSEN H. H. — *Rev. Mod. Physics*, 1951, **23**, 90.
- [2] GRENIER-BESSON M.-L., AMAT G. et BARCHEWITZ P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **235**, 1636.
- [3] AMAT G., BARCHEWITZ P. et GRENIER-BESSON M.-L. — Étude de la bande $2\nu_3$ de N_2O . *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 563.
- [4] DOUGLAS A. E. et MØLLER C. K. — *J. Chem. Phys.*, 1954, **22**, 275.
- [5] WHITE J. W. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1942, **32**, 285-288.
- [6] HERZBERG G. et HERZBERG L. — *J. Chem. Phys.*, 1950, **18**, 1551.
- [7] AMAT G. et GRENIER-BESSON M.-L. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 591.
- [8] TAYLOR J. H., BENEDICT W. S., STRONG J. — *J. Chem. Phys.*, 1952, **20**, 1884.

LA SOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN (*) $g_{\mu\nu;\rho} = 0$

Par MARIE-ANTOINETTE TONNELAT.

Sommaire. — Calculs détaillés de la résolution des équations $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ de la théorie unitaire d'Einstein. Obtention de la solution générale. (Cette résolution et la solution générale des équations ont été publiées ici en 1949-1951.) Application au calcul de la solution à symétrie sphérique.

Nous avons publié en 1949-1951 la résolution des équations $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ de la théorie unitaire d'Einstein, c'est-à-dire la détermination complète de la connexion affine en fonction des champs $g_{\mu\nu}$ dans le cas général [1]. Depuis, plusieurs auteurs qui se sont attaqués au même problème ne semblent pas avoir eu connaissance des résultats ainsi obtenus [2]. Il nous a donc paru utile d'explicitier complètement nos calculs afin d'en faciliter la lecture.

La méthode et les résultats exposés ci-après sont, bien entendu, identiques à ceux de 1950. La seule différence est que nous donnons ici in extenso le détail des calculs. La possibilité d'obtenir aisément la solution des équations $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ tient, en grande partie, au choix de notations appropriées. Nous avons gardé autant que possible celles d'Einstein en les modifiant seulement quand cela nous a semblé indispensable au développement de notre travail.

La forme de la solution générale est simple. Ses conditions d'existence sont évidentes. Cette solution générale nous a permis de retrouver immédiatement les valeurs de la connexion affine en fonction des champs dans certains cas particuliers. Par exemple, dans le cas d'une solution statique à symétrie sphérique, nous retrouvons à partir de notre solution générale, les valeurs calculées directement par Bonnor dans ce cas particulier [3]. Dans le cas d'une solution à symétrie sphérique, mais dynamique, nous obtenons aisément un élargissement des formules de Bonnor.

I. — Calculs préliminaires.

1. Les relations entre les tenseurs du second rang $g^{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$. — Soit un tenseur du second

rang $g_{\mu\nu}$ dont les éléments forment le déterminant g ⁽¹⁾. Désignons par $g^{g\mu\nu}$ le mineur relatif à chaque élément $g_{\mu\nu}$. Nous avons par définition :

$$g_{\mu\sigma} g^{\sigma\mu} = g^{\rho\mu} g_{\sigma\mu} = \delta_{\sigma}^{\rho}, \quad (1)$$

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}. \quad (2)$$

Décomposons maintenant $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$ en parties symétriques $\gamma_{\mu\nu}$ et $h^{\mu\nu}$, et antisymétriques $\varphi_{\mu\nu}$ et $f^{\mu\nu}$. On aura ainsi ⁽²⁾ :

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}. \quad (4)$$

Dans ce qui suit, nous adoptons toujours comme dans nos précédents travaux la convention suivante : Une même lettre désigne toujours les composantes covariantes d'un tenseur, le déterminant formé par l'ensemble de ces composantes et le mineur relatif à chacune d'elles. Par exemple, γ et φ sont les déterminants formés par les éléments $\gamma_{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$; $\gamma^{\mu\nu}$ et $\varphi^{\mu\nu}$ sont les mineurs relatifs à ces mêmes éléments. D'une manière analogue, h et f représentent les déterminants formés par les éléments $h_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu}$; $h^{\mu\nu}$ et $f^{\mu\nu}$ sont les mineurs relatifs à $h_{\mu\nu}$ et à $f_{\mu\nu}$.

Nous supposons toujours $g \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. De plus, un certain nombre de relations de ce paragraphe (celles qui supposent possible la définition de $\varphi^{\mu\nu}$) ne sont valables que si $\varphi \neq 0$. Toutefois cette condition n'intervient pas pour restreindre la validité de la solution générale.

(1) C'est ce tenseur que nous appelons $r_{\mu\nu}$ dans notre travail de 1950.

(2) Nous conservons ici les notations que nous avons utilisées jusqu'à présent au lieu des notations d'Einstein :

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + g^{\nu\mu}, \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}$$

et cela pour deux raisons :

1° L'emploi des symboles $-$ et \vee risquerait d'entraîner des confusions avec les notations surlignées que nous définissons par la suite;

2° Il est avantageux de représenter par la même lettre un élément et son mineur pour avoir toujours des relations du type (5) et (6).

(*) Note de l'Éditeur. — Les calculs développés dans cet article reproduisent ceux qui n'avaient pas été imprimés en totalité dans l'article paru en février 1951 au *Journal de Physique* (manuscrit déposé en juillet 1950).

Des réductions très importantes avaient été demandées à l'Auteur en raison des difficultés typographiques soulevées par l'impression in extenso d'un manuscrit mathématique considérable.

Nous aurons donc toujours, par définition, les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\mu\sigma} \gamma^{\mu\rho} &= \delta_{\sigma}^{\rho}, & \varphi_{\mu\sigma} \varphi^{\mu\rho} &= \delta_{\sigma}^{\rho}; \\ h_{\mu\sigma} h^{\mu\rho} &= \delta_{\sigma}^{\rho}, & f_{\mu\sigma} f^{\mu\rho} &= \delta_{\sigma}^{\rho}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$d\gamma = \gamma \gamma^{\mu\nu} d\gamma_{\mu\nu}, \quad d\varphi = \varphi \varphi^{\mu\nu} d\varphi_{\mu\nu} \quad (6)$$

De plus, en désignant par $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ les symboles habituels de Levi-Civita, c'est-à-dire en posant :

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{s'il s'agit d'une permutation paire} \\ & \text{par rapport à } 1, 2, 3, 4; \\ -1 & \text{s'il s'agit d'une permutation im-} \\ & \text{paire par rapport à } 1, 2, 3, 4; \\ 0 & \text{si les indices } 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \text{ figurent} \\ & \text{plus d'une fois,} \end{cases} \quad (7)$$

on passe des composantes $\varphi_{\mu\nu}$ d'un tenseur *antisymétrique* du second rang à ses composantes $\varphi^{\mu\nu}$, et inversement, par les relations :

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}, \quad \varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}; \quad (8)$$

Le déterminant φ formé par les $\varphi_{\mu\nu}$ étant égal à

$$\sqrt{\varphi} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma} = \varphi_{12} \varphi_{34} + \varphi_{31} \varphi_{24} + \varphi_{23} \varphi_{14} \quad (9)$$

Bien entendu, des relations tout à fait analogues existent entre les f , $f_{\mu\nu}$ et $f^{\mu\nu}$.

$$f_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{f}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f^{\rho\sigma}, \quad f^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma}, \quad (10)$$

$$\sqrt{f} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} = f_{12} f_{34} + f_{31} f_{24} + f_{23} f_{14} \quad (11)$$

Dans le cas d'un tenseur *symétrique* du second rang, on aura les relations :

$$\gamma \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu\sigma}. \quad (12)$$

De même pour h , $h_{\mu\nu}$ et $h^{\mu\nu}$.

Enfin, un calcul classique de déterminants permet d'exprimer ⁽³⁾ le déterminant g en fonction de γ et de φ par la relation

$$g = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2} \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma}. \quad (13)$$

et le mineur $g^{\mu\nu}$ en fonction des mineurs $\gamma \gamma^{\mu\nu}$ et $\varphi \varphi^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \gamma \gamma^{\mu\nu} + \varphi \varphi^{\mu\nu} + \gamma \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} \varphi_{\rho\sigma} + \varphi \varphi^{\mu\rho} \varphi^{\nu\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \quad (14)$$

g , γ et φ sont les déterminants formés avec les éléments $g_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$. Réciproquement, $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\varphi}$ sont les déterminants formés avec les éléments $g^{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\nu}$, $\varphi^{\mu\nu}$ (4). On aura donc entre g , h et f une relation analogue à (13) :

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f} + \frac{1}{2h} h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} f^{\mu\nu} f^{\rho\sigma}, \quad (15)$$

$g^{\mu\nu}$, $\gamma \gamma^{\mu\nu}$, $\varphi \varphi^{\mu\nu}$ sont les mineurs relatifs aux éléments $g_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$. Réciproquement $\frac{1}{g} g_{\mu\nu}$, $\frac{1}{\gamma} \gamma_{\mu\nu}$, $\frac{1}{\varphi} \varphi_{\mu\nu}$ sont les mineurs relatifs aux éléments $g^{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\nu}$, $\varphi^{\mu\nu}$ (4). D'où une relation analogue à (14) :

$$\frac{1}{g} g^{\mu\nu} = \frac{1}{h} h^{\mu\nu} + \frac{1}{f} f^{\mu\nu} + \frac{1}{h} h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} f^{\rho\sigma} + \frac{1}{f} f_{\mu\rho} f_{\nu\sigma} h^{\rho\sigma}. \quad (16)$$

Scindons alors (14) et (16) en parties symétriques et antisymétriques. D'après (14) :

$$\left. \begin{aligned} (s) \quad h^{\mu\nu} &= \frac{\gamma}{g} \gamma^{\mu\nu} + \frac{\varphi}{g} \varphi^{\mu\rho} \varphi^{\nu\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \\ &= \gamma^{\mu\nu} \left(1 - \frac{\varphi}{g} \right) - \frac{\gamma}{g} \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} \gamma^{\lambda\tau} \varphi_{\rho\lambda} \varphi_{\sigma\tau}, \\ (a) \quad f^{\mu\nu} &= \frac{\varphi}{g} \varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{g} \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} \varphi_{\rho\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

et d'après (16)

$$\left. \begin{aligned} (s) \quad \gamma_{\mu\nu} &= \frac{g}{h} h_{\mu\nu} + \frac{g}{f} f_{\mu\rho} f_{\nu\sigma} h^{\rho\sigma} \\ &= h_{\mu\nu} \left(1 - \frac{g}{f} \right) - \frac{g}{h} h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} h^{\lambda\tau} f^{\rho\lambda} f^{\sigma\tau}, \\ (a) \quad \varphi_{\mu\nu} &= \frac{g}{f} f_{\mu\nu} + \frac{g}{h} h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} f^{\rho\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

les secondes relations (17 s) et (18 s) se déduisant des premières au moyen de (I.3) et de (I.4) (cf. Note I).

D'autre part, on peut établir les relations réciproques de (17) et de (18). On obtiendra ainsi (cf. Note I) les expressions que résume le tableau suivant (9).

Partie symétrique (s).	Partie antisymétrique (a).
$h^{\mu\nu} = \frac{\gamma}{g} \gamma^{\mu\nu} + \frac{\varphi}{g} \varphi^{\mu\rho} \varphi^{\nu\sigma} \gamma_{\rho\sigma}$	$f^{\mu\nu} = \frac{\varphi}{g} \varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{g} \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} \varphi_{\rho\sigma}$
$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\rho} \varphi_{\nu\sigma} \gamma^{\rho\sigma}$	$f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu\sigma} \varphi^{\rho\sigma}$
$\gamma_{\mu\nu} = \frac{g}{h} h_{\mu\nu} + \frac{g}{f} f_{\mu\rho} f_{\nu\sigma} h^{\rho\sigma}$	$\varphi_{\mu\nu} = \frac{g}{f} f_{\mu\nu} + \frac{g}{h} h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} f^{\rho\sigma}$
$\gamma^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\rho} f^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$	$\varphi^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} + h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} f_{\rho\sigma}$

(19)

(3) Cf. par exemple, E. Schrödinger. *Proc. Roy. Ir. Acad.*, 51. A, 1948, p. 205.

La multiplication membre à membre des deux premières relations de (19 s) et de (19 a) (ou, ce qui revient au même, des deux dernières) conduit enfin aux deux relations suivantes (cf. Note I; éq. I.19).

$$g^2 = \gamma h = f \varphi. \quad (20)$$

Notons enfin la relation (I.7) (cf. Note I) qui intervient dans la suite des calculs :

$$\varphi \mu^\tau \varphi^\nu \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\sigma\rho} = \delta_\sigma^\tau (g - \gamma - \varphi) - \gamma \gamma^{\mu\tau} \gamma^{\nu\rho} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\sigma\rho} \quad (21)$$

et se réduit pour $\sigma = \tau$ à l'expression suivante :

$$\varphi \mu^\sigma \varphi^\nu \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\sigma\rho} = \gamma \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma} = 2(g - \gamma - \varphi). \quad (22)$$

Toutes ces relations résultent uniquement des propriétés des déterminants.

2. Introduction des notations $A_{\bar{\rho}}$ et $A_{[\mu\nu]\rho}^*$.

a. DÉFINITION DES GRANDEURS SURLIGNÉES ET RELATIONS ENTRE A_ρ , $A_{\bar{\rho}}$ et $A_{\bar{\rho}}^*$. — Soit un quadrivecteur quelconque de composantes A_ρ . Ses composantes A^ρ se déduiront des A_ρ au moyen du tenseur symétrique $\gamma^{\rho\sigma}$. Nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} A_\rho &= \gamma_{\rho\sigma} A^\sigma, \\ A_{\bar{\rho}} &= \varphi_{\rho\sigma} A^\sigma = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} A_\tau, \\ A_{\bar{\rho}}^* &= \varphi_{\rho\sigma} A^{\bar{\sigma}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} A_{\bar{\tau}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\lambda\mu} A_\mu, \\ A_{\bar{\rho}}^{\bar{\sigma}} &= \varphi_{\rho\sigma} A^{\bar{\sigma}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\lambda\mu} \varphi_{\mu\pi} \gamma^{\pi\delta} A_{\bar{\delta}}, \\ A_{\bar{\rho}}^{\bar{\sigma}\bar{\tau}} &= \varphi_{\rho\sigma} A^{\bar{\sigma}\bar{\tau}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\lambda\mu} \varphi_{\mu\pi} \gamma^{\pi\delta} \varphi_{\delta\epsilon} \gamma^{\epsilon\nu} A_{\bar{\nu}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

et

$$\left. \begin{aligned} A^\rho &= \gamma^{\rho\sigma} A_\sigma, \\ A^{\bar{\rho}} &= \gamma^{\rho\sigma} A_{\bar{\sigma}} = \gamma^{\rho\sigma} \varphi_{\sigma\tau} A^\tau, \\ A^{\bar{\rho}} &= \gamma^{\rho\sigma} A_{\bar{\sigma}} = \gamma^{\rho\sigma} \varphi_{\sigma\tau} \gamma^{\tau\lambda} \varphi_{\lambda\mu} A^\mu, \\ A^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} &= \gamma^{\rho\sigma} A_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} = \gamma^{\rho\sigma} \varphi_{\sigma\tau} \gamma^{\tau\lambda} \varphi_{\lambda\mu} \gamma^{\mu\pi} \gamma^{\pi\delta} A_{\bar{\delta}}, \\ A^{\bar{\rho}\bar{\sigma}\bar{\tau}} &= \gamma^{\rho\sigma} A_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}\bar{\nu}} = \gamma^{\rho\sigma} \varphi_{\sigma\tau} \gamma^{\tau\lambda} \varphi_{\lambda\mu} \gamma^{\mu\pi} \gamma^{\pi\delta} \gamma^{\delta\epsilon} \varphi_{\epsilon\nu} A_{\bar{\nu}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

On peut démontrer (cf. Note II à la fin de ce travail) l'identité suivante :

$$A_{\bar{\rho}}^{\bar{\sigma}} = -\frac{\varphi}{\gamma} A_{\bar{\rho}} - \frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi) A_{\bar{\rho}}^*. \quad (25)$$

b. DÉFINITION DE $A_{[\mu\nu]\rho}^*$ ET RELATIONS ENTRE $A_{[\mu\nu]\rho}$, $A_{[\mu\nu]\rho}^*$ et $A_{[\mu\nu]\rho}^{**}$. — Considérons maintenant un tenseur $A_{[\mu\nu]\rho}$ antisymétrique en μ, ν . Nous poserons :

$$A_{[\mu\nu]\rho}^* = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\pi\sigma} \gamma^{\pi\lambda} \gamma^{\sigma\tau} A_{[\lambda\tau]\rho}. \quad (26)$$

De même

$$A_{[\mu\nu]\rho}^{**} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\pi\sigma} \gamma^{\pi\lambda} \gamma^{\sigma\tau} A_{[\lambda\tau]\rho}^*. \quad (27)$$

L'identité

$$A_{[\mu\nu]\rho}^{**} = -A_{[\mu\nu]\rho}. \quad (28)$$

est toujours valable. En effet :

$$A_{[\mu\nu]\rho}^{**} = -\frac{\gamma}{4} \varepsilon_{\mu\nu\pi\sigma} \gamma^{\pi\lambda} \gamma^{\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\tau\beta\delta} \gamma^{\beta\epsilon} \gamma^{\delta\eta} A_{[\epsilon\eta]\rho}.$$

et, d'après (12) :

$$\begin{aligned} A_{[\mu\nu]\rho}^{**} &= -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\pi\sigma} \varepsilon_{\lambda\tau\beta\delta} \gamma_{\mu\pi} \gamma_{\nu\sigma} \gamma_{\beta\epsilon} \gamma_{\delta\eta} A_{[\epsilon\eta]\rho} \\ &= -\delta_{\beta}^{\pi} \delta_{\delta}^{\sigma} \gamma_{\mu\pi} \gamma_{\nu\sigma} \gamma_{\beta\epsilon} \gamma_{\delta\eta} A_{[\epsilon\eta]\rho} = -A_{[\mu\nu]\rho}. \end{aligned}$$

II. — Résolution de $g_{\mu\nu}^{\rho} = 0$.

1. Les équations $g_{\mu\nu}^{\rho} = 0$. Calcul de $\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}$ et de $\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}$. — Les 64 équations $g_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ s'explicitent de la manière suivante :

$$g_{\mu\nu}^{\rho} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} g_{\mu\sigma} = 0. \quad (29)$$

Pour les composantes contravariantes, on a, d'une manière analogue :

$$g^{\mu\nu\rho} = \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} g^{\mu\sigma} = 0. \quad (30)$$

Nous allons chercher à déterminer les 64 coefficients de connexion affine $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ en fonction des champs $g^{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$, et de leurs dérivées.

Appelons $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ les parties symétrique et antisymétrique de la connexion affine :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (31)$$

Posons

$$\Gamma_\rho = \Gamma_{\rho}^{\sigma}. \quad (32)$$

Nous ne faisons aucune hypothèse sur la forme des équations du champ. En particulier, nous ne posons pas *a priori* la condition $\Gamma_\rho = 0$ et nous calculons la solution des équations $g_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ pour une connexion affine $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ tout à fait quelconque.

a. CALCUL DIRECT DE $\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}$. — Multiplions (29) par $g^{\mu\nu}$. On a

$$g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\mu} = 0$$

(*) En effet

$$\begin{aligned} \text{Dét } g^{\mu\nu} &= \text{Dét} \left(\frac{1}{g} \text{ mineur } g_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{g^4} \text{Dét} (\text{mineur } g_{\mu\nu}) = \frac{1}{g^4} g^3 = \frac{1}{g}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mineur } g^{\mu\nu} &= \text{Mineur} \left(\frac{1}{g} \text{ mineur } g_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{g^3} \text{mineur} (\text{mineur } g_{\mu\nu}) = \frac{1}{g^3} g^2 g_{\mu\nu} = \frac{1}{g} g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

(*) Toutes ces relations sont numérotées (25)-28) (*J. Physique Rad.*, 1951) et (27)-(29) (*J. Physique Rad.*, 1952).

ou

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \frac{1}{2g} \partial_{\mu} g = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \text{Log } g \quad (^{\circ}). \quad (33)$$

b. CALCUL DIRECT DE $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$. — Formons, d'après (30)

$g^{\mu\rho}; \rho - g^{\rho\mu}; \rho$. On obtient l'identité

$$g^{\mu\rho}; \rho - g^{\rho\mu}; \rho \equiv \partial_{\rho}(g^{\mu\rho} - g^{\rho\mu}) + \Gamma_{\sigma\sigma}^{\rho} g^{\mu\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} g^{\sigma\mu} = 0.$$

ou

$$\frac{1}{2}(g^{\mu\rho}; \rho - g^{\rho\mu}; \rho) \equiv \partial_{\rho} f^{\mu\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} f^{\mu\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} h^{\mu\sigma} = 0. \quad (34)$$

Posons

$$f^{\mu} = \partial_{\rho} \sqrt{-g} f^{\mu\rho}, \quad f^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\rho} \sqrt{-g} f^{\mu\rho}. \quad (35)$$

D'après (33)

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} = \partial_{\mu} \log \sqrt{-g}$$

et (34) peut s'écrire ;

$$\frac{1}{2}(g^{\mu\rho}; \rho - g^{\rho\mu}; \rho) \equiv f^{\mu} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} h^{\mu\sigma} = 0. \quad (36)$$

On aura donc, en multipliant (36) par $h_{\mu\nu}$

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\rho} = h_{\nu\mu} f^{\mu}. \quad (37)$$

Cette relation peut prendre une forme un peu différente en remplaçant $h_{\mu\nu}$ par son expression (19) en fonction des γ et des φ . On a

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\rho} = h_{\mu\rho} f^{\rho} = (\gamma_{\mu\rho} + \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\nu\sigma}) f^{\rho}$$

ou

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} = f_{\mu} - f_{\bar{\mu}} \quad (^{\circ}), \quad (38)$$

d'après les définitions (23).

2. Première étape de la résolution de $g_{\mu\nu;\rho} = 0$.

Calcul de la connexion affine en fonction des 24 coefficients antisymétriques $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$. — Scindons l'équation (29) en parties symétrique et antisymétrique en μ, ν . Nous obtenons :

$$\partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu} - (\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\mu}) - (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \varphi_{\sigma\rho} + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} \varphi_{\sigma\rho}) = 0, \quad (S_1)$$

$$\partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - (\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\mu}) - (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \gamma_{\sigma\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} \gamma_{\sigma\rho}) = 0. \quad (A_1)$$

Permutons ρ et μ , puis ρ et ν . Nous obtenons quatre équations analogues aux précédentes (S_2) et (A_2), puis (S_3) et (A_3). Formons (S_2) + (S_3) - (S_1) et (A_2) + (A_3) + (A_1).

(*) Ces expressions sont numérotées (E) p. 183, C. R. Acad. Sc., 1950; (36) p. 84, J. Physique Rad., 1951; (47) et (51) J. Physique Rad., 1952.

Nous avons

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu} \gamma_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu} - 2\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \gamma_{\sigma\rho} \\ & + 2(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\mu}) = 0, \end{aligned} \quad (S)$$

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu} \varphi_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \varphi_{\mu\rho} + \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} \\ & - 2(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\mu}) - 2\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \gamma_{\sigma\rho} = 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Notons qu'en formant (A_2) + (A_3) - (A_1) et (S_2) + (S_3) + (S_1), nous obtenons les équations (S)' et (A)' qui sont les conséquences de (S) et de (A) :

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu} \gamma_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\rho} + \partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu} \\ & - 2(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \gamma_{\sigma\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\nu}) = 0, \end{aligned} \quad (S')$$

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu} \varphi_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \varphi_{\mu\rho} + \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} \\ & - 2(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \gamma_{\sigma\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\mu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\nu}) = 0. \end{aligned} \quad (A')$$

Introduisons les notations suivantes qui définissent les symboles de Christoffel formés à l'aide des $\gamma_{\mu\nu}$:

$$[\mu\nu, \rho] = \frac{1}{2}(\partial_{\mu} \gamma_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu}), \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} \gamma_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} \gamma_{\mu\nu}). \quad (40)$$

Appelons \hat{D} la dérivation covariante qui utilise ces symboles. On a par définition :

$$\hat{D}_{\rho} \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad (41)$$

et, en particulier

$$\hat{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \varphi_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} \varphi_{\mu\sigma} \quad (42)$$

Enfin on peut noter que

$$\frac{1}{\varphi} \hat{D}_{\rho} \varphi = \varphi^{\mu\nu} \hat{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{\varphi} \partial_{\rho} \varphi - 2 \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} = \partial_{\rho} \text{Log } \frac{\varphi}{\gamma}. \quad (43)$$

De même

$$\frac{1}{g} \hat{D}_{\rho} g = g^{\mu\nu} \hat{D}_{\rho} g_{\mu\nu} = \frac{1}{g} \partial_{\rho} g - 2 \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} = \partial_{\rho} \text{Log } \frac{g}{\gamma}. \quad (44)$$

Posons maintenant

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + u_{\mu\nu}^{\rho} \quad (45)$$

et aussi, en abaissant les indices supérieurs (7)

$$u_{\mu\nu,\rho} = \gamma_{\rho\sigma} u_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\sigma} = \gamma_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (46)$$

(S) et (A) s'écrivent alors :

$$u_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \gamma_{\sigma\mu}, \quad (I)$$

$$\Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\sigma} = -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu,\rho} + \hat{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - (u_{\mu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\nu} - u_{\nu\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\mu}) \quad (II)$$

(7) Dans tout ce travail la virgule (par exemple dans $u_{\mu\nu,\rho}$ ou $\Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\sigma}$) et plus tard dans $R_{\mu\nu,\rho}^{\sigma}$, $S_{\mu\nu,\rho}^{\sigma}$ est destinée simplement à séparer l'un des indices et n'a aucun rapport avec la notation dérivée ordinaire.

en posant :

$$\varphi_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho}. \quad (47)$$

Quant à (S)' et à (A)', conséquences de (S) et de (A), elles s'écrivent simplement :

$$u_{\mu\nu\rho} = u_{\mu\nu,\rho} + u_{\rho\mu,\nu} + u_{\nu\rho,\mu} = 0, \quad (I')$$

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \Gamma_{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\rho\mu,\nu} + \Gamma_{\nu\rho,\mu} = -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho}. \quad (II')$$

Le système des 64 équations (29) est donc scindé maintenant en 40 équations (I) et en 24 équations (II). On aura (*)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \gamma^{\rho\sigma} \left(\Gamma_{\mu\rho}^\lambda \varphi_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \varphi_{\lambda\mu} \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho. \quad (48)$$

Tout revient à déterminer les 24 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$.

3. Deuxième étape : Élimination de la partie symétrique de la connexion et obtention de 24 équations en $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. — Nous devons résoudre le système formé par (I) et (II). Pour cela, à l'aide de (I), formons l'expression

$$u_{\mu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\nu} - u_{\nu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\mu}.$$

qui intervient dans (II). On a

$$\begin{aligned} u_{\mu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\nu} - u_{\nu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\mu} \\ = \gamma^{\sigma\lambda} \left(\Gamma_{\mu\lambda}^\tau \varphi_{\tau\rho} \varphi_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\tau \varphi_{\tau\mu} \varphi_{\sigma\nu} \right. \\ \left. - \Gamma_{\nu\lambda}^\tau \varphi_{\tau\rho} \varphi_{\sigma\mu} - \Gamma_{\rho\lambda}^\tau \varphi_{\tau\nu} \varphi_{\sigma\mu} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Utilisons les notations suivantes que nous avons définies en (23) :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu,\rho} &= \gamma_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma, \\ \Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}} &= \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \Gamma_{\mu\nu,\tau} = \varphi_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma, \\ \Gamma_{\mu\nu,\bar{\bar{\rho}}} &= \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \Gamma_{\mu\nu,\bar{\tau}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Posons, d'autre part,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\rho} &= \Gamma_{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\rho\mu,\nu} + \Gamma_{\nu\rho,\mu}, \\ \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} &= \Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}} + \Gamma_{\rho\mu,\bar{\nu}} + \Gamma_{\nu\rho,\bar{\mu}}, \\ \bar{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu\rho} &= \Gamma_{\mu\nu,\bar{\bar{\rho}}} + \Gamma_{\rho\mu,\bar{\bar{\nu}}} + \Gamma_{\nu\rho,\bar{\bar{\mu}}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Le calcul de (49) (cf. Note III) conduit alors à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} u_{\mu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\nu} - u_{\nu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\mu} \\ = -2\gamma^{\sigma\lambda} \left(\Gamma_{\rho\lambda,\bar{\mu}} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\nu}} \varphi_{\sigma\mu} \right) \\ - \gamma^{\sigma\lambda} \left(\bar{\Gamma}_{\mu\lambda\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}_{\nu\lambda\rho} \varphi_{\sigma\mu} \right) - \bar{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\mu\nu,\bar{\bar{\rho}}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Remplaçons maintenant cette expression dans (II). On obtient 24 équations dans lesquelles ne figure

plus que la partie antisymétrique de la connexion affine. Ce sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu,\rho} - \gamma^{\sigma\lambda} \left(\bar{\Gamma}_{\mu\lambda,\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}_{\nu\lambda,\rho} \varphi_{\sigma\mu} \right) \\ - 2\gamma^{\sigma\lambda} \left(\Gamma_{\rho\lambda,\bar{\mu}} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\nu}} \varphi_{\sigma\mu} \right) + \Gamma_{\mu\nu,\bar{\bar{\rho}}} \\ - \bar{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho} + \bar{D}_\rho \varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (E)$$

Ce sont ces 24 équations en $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ qu'il faut maintenant résoudre.

4. Troisième étape : Obtention d'une équation en $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$, $\Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}}$ et $\Gamma_{\mu\nu,\bar{\bar{\rho}}}$. — Nous allons transformer les 24 équations (E) de façon à faire apparaître les 24 coefficients antisymétriques par l'intermédiaire des termes suivants ayant une même valeur μ, ν, ρ des indices dans une même équation

$$\Gamma_{\mu\nu,\rho} = \gamma_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma, \quad (53)$$

$$\Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \Gamma_{\mu\nu,\bar{\tau}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (54)$$

et

$$\Gamma_{\mu\nu,\bar{\bar{\rho}}} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\rho\lambda} \gamma^{\sigma\tau} \Gamma_{\lambda\tau,\rho}. \quad (55)$$

Nous introduirons aussi les deux auxiliaires de calcul :

$$A_\rho = \frac{1}{2} \gamma^{\mu\lambda} \gamma^{\nu\tau} \varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\tau,\rho}, \quad (56)$$

$$B_\rho = \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu,\rho}. \quad (57)$$

Nous allons calculer les expressions suivantes qui interviennent dans (E).

a. CALCUL DE $\bar{\Gamma}_{\mu\lambda\rho}$. — On trouve (cf. Note IV) :

$$\bar{\Gamma}_{\mu\lambda\rho} = -(\varphi_{\mu\lambda} \Gamma_\rho + \varphi_{\rho\mu} \Gamma_\lambda + \varphi_{\lambda\rho} \Gamma_\mu) + \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} B_\tau. \quad (58)$$

b. CALCUL DE $\gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\mu}} - \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\nu}})$. — Ce calcul (cf. Note V) conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\mu}} - \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\nu}}) \\ = -\frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} (\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} - \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu}) \Gamma_{\rho\lambda\pi} \\ + \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\sigma\lambda} - \varphi_{\mu\nu} A_\rho. \end{aligned} \quad (59)$$

(*) Ces expressions sont numérotées (S) et (A), p. 183, C. R. Acad. Sc., 1950; (S) et (A), J. Physique Rad., 1951, p. 85; (59) p. 181, J. Physique Rad., 1952.

(*) Il peut sembler préférable de former l'intermédiaire de calcul $B'_\rho = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda\tau} = \sqrt{\varphi} B_\rho$ car B'_ρ a un sens dans le cas singulier $\varphi = 0$, tandis que B_ρ n'en a pas. Les résultats obtenus sont équivalents car c'est bien B'_ρ , quantité toujours finie qui intervient dans les expressions (58) et (60).

c. CALCUL DE $\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho}$. — On obtient finalement (cf. Note VI) :

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} = & \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\Phi}{\gamma}\right) \Gamma_{\mu\nu\rho} \\ & + \sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} A_{\lambda} + \sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\lambda\alpha} \gamma^{\sigma\beta} \varphi_{\alpha\beta} B_{\sigma} \\ & + \frac{\sqrt{\bar{\Phi}}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\alpha\sigma} \gamma^{\lambda\tau} \varphi_{\sigma\tau} \varphi^{\beta\delta} \Gamma_{\alpha\beta\delta}.\end{aligned}\quad (60)$$

Remplaçons maintenant ces trois quantités (58), (59) et (60) par leurs valeurs dans l'équation (E). Nous obtenons

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}} & + \gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\mu\lambda} \Gamma_{\rho} + \varphi_{\rho\mu} \Gamma_{\lambda} + \varphi_{\lambda\rho} \Gamma_{\mu}) \varphi_{\sigma\nu} \\ & - \sqrt{\bar{\Phi}} \gamma^{\sigma\lambda} \varepsilon_{\mu\lambda\rho\pi} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\nu} B_{\tau} \\ & - \gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\nu\lambda} \Gamma_{\rho} + \varphi_{\rho\nu} \Gamma_{\lambda} + \varphi_{\lambda\rho} \Gamma_{\nu}) \varphi_{\sigma\mu} \\ & + \sqrt{\bar{\Phi}} \gamma^{\sigma\lambda} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\pi} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\mu} B_{\tau} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} (\sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} - \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu}) \Gamma_{\rho\lambda\pi} \\ & - \frac{2\sqrt{\bar{\Phi}}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\mu\nu,\rho}^* + 2\varphi_{\mu\nu} A_{\rho} - \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\Phi}{\gamma}\right) \Gamma_{\mu\nu\rho} \\ & - \sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} A_{\lambda} - \sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\lambda\alpha} \gamma^{\sigma\beta} \varphi_{\alpha\beta} B_{\sigma} \\ & - \frac{\sqrt{\bar{\Phi}}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\alpha\sigma} \gamma^{\lambda\tau} \varphi_{\sigma\tau} \varphi^{\beta\delta} \Gamma_{\alpha\beta\delta} = -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho} + \bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (61)$$

Mais

$$\begin{aligned}& - \sqrt{\bar{\Phi}} \gamma^{\sigma\lambda} (\varepsilon_{\mu\lambda\rho\pi} \varphi_{\sigma\nu} - \varepsilon_{\nu\lambda\rho\pi} \varphi_{\sigma\mu}) \gamma^{\pi\tau} B_{\tau} \\ & = \sqrt{\bar{\Phi}} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\pi\tau} (\varepsilon_{\mu\lambda\rho\pi} \varphi_{\sigma\nu} + \varepsilon_{\nu\lambda\rho\pi} \varphi_{\sigma\rho} + \varepsilon_{\rho\lambda\pi} \varphi_{\sigma\mu}) B_{\tau} \\ & + \sqrt{\bar{\Phi}} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\pi\tau} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \varphi_{\sigma\rho} B_{\tau} \\ & = \sqrt{\bar{\Phi}} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} B_{\tau} + \sqrt{\bar{\Phi}} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} B_{\tau}\end{aligned}\quad (62)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}} - \frac{2\sqrt{\bar{\Phi}}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\mu\nu,\rho}^* & = -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho} + \bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} \\ & - \gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\rho\mu} \varphi_{\sigma\nu} - \varphi_{\rho\nu} \varphi_{\sigma\mu} - \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu}) \Gamma_{\lambda} \\ & - \gamma^{\sigma\lambda} \varphi_{\lambda\rho} (\varphi_{\sigma\nu} \Gamma_{\mu} + \varphi_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu} + \varphi_{\nu\mu} \Gamma_{\sigma}) \\ & - \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} (\sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} - \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu}) \Gamma_{\rho\lambda\pi} \\ & + \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\Phi}{\gamma}\right) \Gamma_{\mu\nu\rho} \\ & + \frac{\sqrt{\bar{\Phi}}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\alpha\sigma} \gamma^{\lambda\tau} \varphi_{\sigma\tau} \varphi^{\beta\delta} \Gamma_{\alpha\beta\delta} \\ & - \sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\rho} B_{\tau} \\ & + \sqrt{\bar{\Phi}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} A_{\lambda} - 2\varphi_{\mu\nu} A_{\rho}.\end{aligned}\quad (63)$$

Dans l'expression du second membre les termes $\Gamma_{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho}$ et $\Gamma_{\rho} = f_{\rho} - f_{\bar{\rho}}$ sont connus en fonction des champs [cf. (II)' et (38)]. De même, $\bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu}$, dérivée covariante formée avec les $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ ne fait intervenir que les $\gamma_{\rho\sigma}$ [cf. (41)]. Nous aurons donc établi, comme nous nous le proposons, une relation entre $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$, $\Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}}$ et $\Gamma_{\mu\nu,\rho}^*$ si, dans (63), nous savons

exprimer les intermédiaires de calcul A_{ρ} et B_{ρ} en fonction des champs.

d. CALCUL DE $B_{\rho} = \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu,\rho}$. — La valeur de B_{ρ} s'obtient immédiatement à partir de (II). En multipliant (II) par $\frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu}$ et en sommant, on a en effet :

$$B_{\rho} = -\frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} + u_{\rho}.\quad (64)$$

Mais

$$\begin{aligned}\varphi^{\mu\nu} \bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} & = \varphi^{\mu\nu} \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \mu\rho \end{smallmatrix} \right\} \varphi_{\sigma\nu} - \varphi^{\mu\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} \varphi_{\mu\sigma} \\ & = \frac{1}{2} \partial_{\rho} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\varphi} \bar{D}_{\rho} \varphi = \varphi^{\mu\nu} \bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \text{Log} \frac{\Phi}{\gamma}.\quad (65)$$

D'autre part, d'après (33) :

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} = \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \rho\mu \end{smallmatrix} \right\} + u_{\mu\rho}^{\rho} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \text{Log} \mathcal{E}.\quad (33)$$

D'où

$$\begin{aligned}u_{\mu} & = u_{\mu\rho}^{\rho} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \text{Log} \mathcal{E} - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\rho \end{smallmatrix} \right\} \\ & = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \text{Log} \mathcal{E} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \text{Log} \gamma, \\ u_{\mu} & = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma}.\end{aligned}\quad (66)$$

En remplaçant dans (64) $\varphi^{\mu\nu} \bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu}$ et u_{ρ} par leurs valeurs, on obtient

$$B_{\rho} = -\frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \text{Log} \frac{\Phi}{\mathcal{E}}.\quad (67)$$

e. CALCUL DE $A_{\rho} = \frac{1}{2} \gamma^{\mu\lambda} \gamma^{\nu\tau} \varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\tau,\rho}$. — La multiplication de (E) par $\frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu}$ nous donne enfin, en sommant, une relation entre A_{ρ} et B_{ρ} . On a, en effet, (cf. Note VII).

$$\begin{aligned}B_{\rho} + A_{\rho} & - \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\mu} \gamma^{\beta\nu} \varphi_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu\rho} \\ & = -\frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \bar{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (68)$$

c'est-à-dire, en comparant avec (64),

$$A_{\rho} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\mu} \gamma^{\beta\nu} \varphi_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu\rho} + u_{\rho}\quad (69)$$

et, en tenant compte des valeurs (II)' et (66) de $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ et de u_{ρ}

$$A_{\rho} = -\frac{1}{4} \gamma^{\alpha\mu} \gamma^{\beta\nu} \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma}.\quad (70)$$

Les quantités A_{ρ} et B_{ρ} étant calculées en fonction des champs, il ne reste plus qu'à les remplacer par leur valeur dans (63).

On a ainsi (cf. Note VIII)

$$\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} \quad (\mathcal{E})$$

en posant

$$\begin{aligned} R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} = & -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho} + \hat{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho} \\ & + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \varphi_{\sigma\tau\rho} \\ & - \varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} \\ & - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}} \varepsilon_{[\mu\nu]\rho\lambda}^{\sigma\alpha} \varphi^{\alpha\lambda} \partial_\sigma \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} \\ & + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^{\sigma\alpha} \partial_\rho \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda} [\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma_\lambda + \varphi_{\lambda\rho} (\varphi_{\mu\nu} \Gamma_\sigma \\ & \quad + \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_\nu + \varphi_{\sigma\nu} \Gamma_\mu)]. \end{aligned} \quad (71)$$

Rappelons les notations suivantes résultant des conventions (26)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\mu\nu}^* &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\sigma} \varphi_{\lambda\sigma}, \\ \varphi_{[\mu\nu]}^* &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\sigma} \varphi_{\lambda\sigma}, \\ \varepsilon_{[\mu\nu]\rho\lambda}^* &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha\tau} \gamma^{\beta\sigma} \varepsilon_{\tau\sigma\rho\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Dans l'expression de $R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$ tous les termes sont bien déterminés en fonction des champs $\gamma_{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$ (γ compris, rappelons-le, \hat{D}_ρ qui est la dérivée covariante formée à l'aide des γ). Γ_ρ , qu'on suppose nul dans la théorie d'Einstein, s'exprime plus généralement en fonction des champs par les relations (38) et la définition (35). La partie antisymétrique $\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\sigma\mu} = \gamma^{\sigma\rho} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$ de la connexion affine sera donc complètement déterminée quand on aura résolu l'équation (8), c'est-à-dire quand on aura exprimé $\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$ en fonction de la quantité connue $R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$. C'est la dernière étape du calcul.

5. Quatrième étape : Résolution de l'équation $\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$. — Nous avons à résoudre

$$\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}, \quad (\mathcal{E})$$

où $R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$ est connu [cf. (71)].

L'équation correspond à une expression $\mathcal{E}_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} = 0$,

Pour abréger, nous désignerons par (\mathcal{E}^*) et par $(\bar{\mathcal{E}})$ les expressions $\mathcal{E}_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$ et $\mathcal{E}_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}}$ déduites de $\mathcal{E}_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}$ de la manière habituelle

$$\mathcal{E}_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\sigma} \mathcal{E}_{\lambda\sigma\rho}, \quad (73)$$

$$\mathcal{E}_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\lambda\pi} \mathcal{E}_{\mu\nu,\pi}. \quad (74)$$

Formons (\mathcal{E}^*) . Nous avons

$$\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}, \quad (\mathcal{E}^*)$$

car, d'après (28) valable pour tout tenseur $A_{\mu\nu,\rho}$, nous avons

$$\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} = -\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho}. \quad (75)$$

Formons maintenant $(\bar{\mathcal{E}})$. Il vient

$$\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} + \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}}. \quad (\bar{\mathcal{E}})$$

Formons maintenant $\frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} (\mathcal{E}^*) + (\bar{\mathcal{E}})$,

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - \frac{4\varphi}{\gamma} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} \\ + \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (76)$$

Mais, d'après (25) valable pour tout vecteur A_ρ

$$\Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} = -\frac{\varphi}{\gamma} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}}. \quad (77)$$

Aussi (76) s'écrit encore

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - \frac{5\varphi}{\gamma} \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}} \\ = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (78)$$

Formons enfin $\left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) (\mathcal{E}) - (78)$:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}\right) \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} \\ = \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (79)$$

On en déduit (79*)

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}\right) \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) \Gamma_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} \\ = \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} + \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\rho} - R_{\sqrt{\gamma}}^{\mu\nu,\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (79^*)$$

La combinaison

$$\left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}\right) (79) + \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) (79^*)$$

nous conduit finalement à l'expression suivante

$$\left[\left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma} \right)^2 - \frac{4\varphi}{\gamma} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right)^2 \right] \Gamma_{\mu\nu,\rho} = \left[\left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma} \right) \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) - \frac{4\varphi}{\gamma} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) \right] R_{\mu\nu,\rho} \\ - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \left[\left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma} \right) - \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) \right] R_{\mu\nu,\rho}^* \\ - \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma} \right) R_{\mu\nu,\bar{\rho}} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) R_{\mu\nu,\bar{\rho}}^* \quad (80)$$

La partie antisymétrique de la connexion affine $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \gamma^{\sigma\rho} \Gamma_{\mu\nu,\rho}$ est donc complètement déterminée

en fonction des champs $\mathcal{E}_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$ puisque les $R_{\mu\nu,\bar{\rho}}^*$ s'expriment eux-mêmes entièrement en fonction des champs au moyen de (71)

$$R_{\mu\nu,\rho} = -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu,\rho} + \bar{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu],\rho}^* + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\sigma\tau} \varphi_{\sigma\tau,\rho} - \varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} \\ + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}} \varepsilon_{[\mu\nu]\rho\lambda}^* \varphi^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} \\ + \gamma^{\sigma\lambda} \left\{ \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (f_\lambda - f_{\bar{\lambda}}) + \varphi_{\lambda\rho} [\varphi_{\mu\nu} (f_\sigma - f_{\bar{\sigma}}) + \varphi_{\sigma\mu} (f_\nu - f_{\bar{\nu}}) + \varphi_{\nu\sigma} (f_\mu - f_{\bar{\mu}})] \right\} \quad (81)$$

Pour exprimer (80) d'une façon plus concise, on peut poser

$$a = 2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}, \quad b = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) \quad (82)$$

et

$$S_{\mu\nu,\rho} = \left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) R_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R_{\mu\nu,\rho}^* - R_{\mu\nu,\bar{\rho}} \quad (83)$$

On a alors

$$(a^2 + b^2) \Gamma_{\mu\nu,\rho} = a S_{\mu\nu,\rho} + b S_{\mu\nu,\rho}^* \quad (84)$$

Si l'on revient à l'expression générale de la connexion affine

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

c'est-à-dire, d'après (45)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + u_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

la partie symétrique $u_{\mu\nu}^\rho$ de cette connexion est entièrement exprimable (I, § 2) en fonction de la partie antisymétrique $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. En effet, avec (48)

on a

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \gamma^{\rho\lambda} \left(\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \varphi_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \varphi_{\sigma\mu} \right) \right\} \quad (85)$$

Elle s'exprime complètement en fonction de la partie antisymétrique, elle-même univoquement déterminée en fonction des champs sous des condi-

tions que nous allons préciser par les équations (80) et (81) [ou, si l'on préfère par les équations (82), (83), (84) et (81)]⁽¹⁰⁾.

Les conditions d'existence de cette solution sont évidentes. L'hypothèse $\gamma = 0$ n'étant pas physiquement admissible, une solution $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ peut se déduire de (80) si

$$a^2 + b^2 \neq 0.$$

Mais, d'autre part, d'après (81), les $R_{\mu\nu,\rho}$ ne peuvent être calculés que si

$$g \neq 0.$$

Il faudra donc

$$g(a^2 + b^2) \neq 0 \quad (86)$$

ou

$$g \left[\left(2 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma} \right)^2 - \frac{4\varphi}{\gamma} \left(3 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right)^2 \right] \neq 0. \quad (87)$$

6. Le cas $\varphi = 0$. — Toute la deuxième partie de ce travail — résolution de $g_{\mu\nu,\rho} = 0$ — ne fait jamais intervenir l'hypothèse $\varphi \neq 0$. Il est vrai que les $\varphi^{\mu\nu}$ sont introduits par l'intermédiaire de calcul que nous avons appelé B_ρ et apparaissent dans l'expression de $R_{\mu\nu,\rho}$. Mais, en fait, il s'agit

toujours de quantités $\sqrt{\varphi} \varphi^{\mu\nu}$ ou $\varphi \varphi^{\mu\nu}$ qui sont là pour représenter synthétiquement les expressions

$\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho,\sigma}$ ou $\frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho,\sigma}$, expressions qui sont

⁽¹⁰⁾ Les relations donnant l'expression de la solution générale sont numérotées (E) p. 183, C. R. Acad. Sc., 1950; (68), (74), (75), (76), J. Physique Rad., 1951, 12, 86; (53), (54), (55), J. Physique Rad., 1952, 13, 181.

toujours finies (et éventuellement nulles). De même, les termes $\sqrt{\varphi} \partial_\rho \log \varphi$ représentent des expressions $2 \partial_\rho \sqrt{\varphi}$ et disparaissent.

D'après (82), (84) la solution générale des équations $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ se réduit, dans le cas $\varphi = 0$ à l'expression suivante :

$$a \Gamma_{\mu\nu,\rho} = S_{\mu\nu,\rho} = a R_{\mu\nu,\rho} - R_{\mu\nu;\rho},$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\rho} = & -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho} + \dot{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{8\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \varepsilon^{\sigma\tau\lambda\pi} \varphi_{\lambda\pi} \varphi_{\sigma\tau\rho} \\ & - \varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \text{Log} \frac{g}{\gamma} + \frac{1}{2} (\varphi_{\mu\nu} \partial_\rho + \varphi_{\rho\mu} \partial_\nu + \varphi_{\nu\rho} \partial_\mu) \text{Log} \frac{g}{\gamma} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda} \varphi_{\lambda\rho} [\varphi_{\mu\nu} (f_\sigma - f_{\bar{\sigma}}) \\ & + \varphi_{\sigma\mu} (f_\nu - f_{\bar{\nu}}) + \varphi_{\nu\sigma} (f_\mu - f_{\bar{\mu}})]. \end{aligned}$$

La dernière ligne de $R_{\mu\nu,\rho}$ disparaissant si f_ρ , et par conséquent Γ_ρ , est nul. Cette solution, si $g \neq 0$, suppose la seule condition

$$a = 2 - \frac{g}{\gamma} \neq 0 \quad (88)$$

d'après la valeur (82) de a .

7. Application I : Calcul de la connexion affine dans le cas d'un champ statique à symé-

trie sphérique. — On utilise les coordonnées polaires :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Dans ces conditions, le ds^2 s'écrit simplement

$$ds^2 = -\alpha dr^2 - \beta(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \sigma dt^2.$$

Nous avons ici

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t.$$

Nous désignerons par $\partial_1 = \frac{d}{dr}$ la dérivée par rapport à r et, plus brièvement, par $\alpha', \beta', \sigma', f'$ et w' la dérivée des $g_{\mu\nu}$ par rapport à r . En postulant l'existence d'un champ électromagnétique, les $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ prennent la forme suivante dans l'hypothèse d'une symétrie sphérique [4] :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} = & \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} \\ \varphi_{\mu\nu} = & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & f \sin \theta & 0 \\ 0 & -f \sin \theta & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \gamma &= -\alpha \sigma \beta^2 \sin^2 \theta, \\ \varphi &= w^2 f^2 \sin^2 \theta, \\ g &= -(\alpha \sigma - w^2)(\beta^2 + f^2) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (90)$$

On peut donc calculer

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} = & \begin{vmatrix} -\frac{1}{\alpha} & & & \\ & -\frac{1}{\beta} & & \\ & & -\frac{1}{\beta \sin^2 \theta} & \\ & & & \frac{1}{\sigma} \end{vmatrix}, \quad \sqrt{\varphi} \varphi^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f \sin \theta \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ -f \sin \theta & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \varphi_{\mu\nu}^* = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\rho\lambda} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\lambda\tau} = & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f \frac{\sqrt{\alpha\sigma}}{\beta} \\ 0 & 0 & -\frac{\beta w \sin \theta}{\sqrt{\alpha\sigma}} & 0 \\ 0 & \frac{\beta w \sin \theta}{\sqrt{\alpha\sigma}} & 0 & 0 \\ -f \frac{\sqrt{\alpha\sigma}}{\beta} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Cela étant, reprenons nos formules (80) à (85) qui déterminent, dans le cas général, la connexion affine. L'examen de (81) nous montre que dans le cas particulier d'une solution statique à symétrie sphérique, les seules quantités $R_{\mu\nu,\rho}$ non nulles

sont $R_{23,1}$, $R_{13,1}$, $R_{31,2}$, $R_{23,2}$, $R_{12,3}$ et $R_{34,3}$ (cf. Note IX). Le calcul de ces quantités (Note IX) nous conduit notamment aux relations

$$R_{12,3} = R_{34,2}, \quad R_{33,3} = R_{23,2} \sin^2 \theta. \quad (92)$$

Par conséquent, d'après (83) et (84), six seulement des 24 coefficients antisymétriques de la connexion affine ne sont pas nuls. Pour exprimer ces six coefficients $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ en fonction des $R_{\mu\nu,\rho}$, il suffit d'écrire les équations (83) et (84) dans le cas particulier de la solution statique à symétrie sphérique. A partir des 6 $R_{\mu\nu,\rho}$ non nuls, on forme en effet facilement les quantités $R_{\mu\nu,\rho}$ et $R_{\mu\nu,\rho}^*$ d'après les valeurs particulières des $\gamma_{\mu\nu}$ et des $\varphi_{\mu\nu}$ données par (89) et (91).

On a, par exemple

$$\left. \begin{aligned} R_{23,1} &= \varphi_{14} \gamma^{44} \varphi_{41} \gamma^{11} R_{23,1} = \frac{\omega^2}{\alpha\sigma} R_{23,1}, \\ R_{23,1} &= \sqrt{-\gamma} \varepsilon_{2314} \gamma^{11} \gamma^{44} R_{14,1} = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\sigma}} \sin\theta R_{14,1}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

On peut donc calculer les six quantités $S_{\mu\nu,\rho}$ définies par (83) compte tenu de la valeur des expressions (93) et de

$$2 - \frac{\sigma}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} = \frac{\alpha\sigma\beta^2 - \alpha\sigma f^2 + \omega^2\beta^2}{\alpha\sigma\beta^2}, \quad \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} = \frac{2\omega f}{\beta\sqrt{\alpha\sigma}}. \quad (94)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{23,1} &= \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) R_{23,1} - \frac{2\omega f}{\alpha\sigma} \sin\theta R_{14,1}, \\ \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{14,1} &= \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) R_{14,1} + \frac{2\omega f}{\beta^2 \sin\theta} R_{23,1}, \\ \left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{31,2} &= \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) R_{31,2} - \frac{2\omega f}{\beta\sigma} \sin\theta R_{24,2}, \\ \left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{24,2} &= \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) R_{24,2} + \frac{2\omega f}{\alpha\beta \sin\theta} R_{31,2}, \\ \Gamma_{12,3} &= \Gamma_{31,2}, \quad \Gamma_{34,3} = \Gamma_{24,2} \sin^2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

La possibilité de déterminer d'une façon univoque les $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ suppose, bien entendu, la condition

$$\alpha^2 + b^2 = \left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \times \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \neq 0. \quad (99)$$

Il ne reste plus qu'à calculer les 6 $R_{\mu\nu,\rho}$ non nuls d'après la formule générale (81). En l'écrivant dans ce cas particulier, on obtient les $R_{\mu\nu,\rho}$ explicités dans la Note (IX). En les remplaçant alors par leurs valeurs dans les expressions précédentes, on obtient immédiatement

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{23,1} &= -\frac{f}{4} \sin\theta \left[\partial_1 \operatorname{Log} \beta^2 \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) - \frac{\beta^2}{f^2} \partial_1 \operatorname{Log} \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) \right], \\ \Gamma_{14,1} &= -\frac{\alpha\sigma}{2\omega} \partial_1 \operatorname{Log} \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right), \\ \Gamma_{31,2} = \Gamma_{12,3} &= -\frac{\beta^2}{4f} \partial_1 \operatorname{Log} \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right), \\ \Gamma_{24,2} = \frac{\Gamma_{34,3}}{\sin^2\theta} &= \frac{\omega\beta}{4\alpha} \partial_1 \operatorname{Log} \beta^2 \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

On a ainsi

$$\left. \begin{aligned} S_{23,1} &= \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) R_{23,1} + \frac{2\omega f}{\alpha\beta} \sin\theta R_{14,1}, \\ S_{14,1} &= \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) R_{14,1} - \frac{2\omega f}{\beta^2 \sin\theta} R_{23,1}, \\ S_{31,2} &= \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) R_{31,2} + \frac{2\omega f}{\beta\sigma} \sin\theta R_{24,2}, \\ S_{24,2} &= \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) R_{24,2} - \frac{2\omega f}{\alpha\beta \sin\theta} R_{31,2}, \\ S_{12,3} &= S_{31,2}, \quad S_{34,3} = S_{24,2} \sin^2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Les deux dernières relations résultent de (92).

En remplaçant alors les $S_{\mu\nu,\rho}$ par leurs valeurs dans (84) et en tenant compte de

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 - \frac{\sigma}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) - \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2}, \\ b &= \frac{2\omega f}{\beta\sqrt{\alpha\sigma}} \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) + \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

$$a^2 + b^2 = \left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right], \quad (97)$$

on obtient

$$\left. \begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{23,1} &= \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) R_{23,1} - \frac{2\omega f}{\alpha\sigma} \sin\theta R_{14,1}, \\ \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{14,1} &= \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) R_{14,1} + \frac{2\omega f}{\beta^2 \sin\theta} R_{23,1}, \\ \left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{31,2} &= \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) R_{31,2} - \frac{2\omega f}{\beta\sigma} \sin\theta R_{24,2}, \\ \left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \Gamma_{24,2} &= \left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right) R_{24,2} + \frac{2\omega f}{\alpha\beta \sin\theta} R_{31,2}, \\ \Gamma_{12,3} &= \Gamma_{31,2}, \quad \Gamma_{34,3} = \Gamma_{24,2} \sin^2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

ces valeurs étant univoquement déterminées si

$$\left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) \neq 0. \quad (101)$$

Cette condition, jointe à la condition (99) montre qu'on obtiendra toujours une solution bien déterminée si

$$\left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right) \left[\left(1 - \frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \times \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + \frac{4\omega^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2} \right] \neq 0. \quad (102)$$

On peut donner à la solution (100) une autre forme en faisant apparaître les expressions

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \partial_1 \operatorname{Log} \beta^2 \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) = \frac{f'f' + \beta'\beta'}{f^2 + \beta^2}, \\ B_1 &= -\frac{\beta}{2f} \partial_1 \operatorname{Log} \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) = \frac{f\beta' - \beta f'}{f^2 + \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

On obtient alors [en élevant, en outre, le dernier

indice dans les formules (100)]

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\sqrt{3}}^1 &= \frac{\beta B_1 + f A_1}{2\alpha} \sin \theta, \\ \Gamma_{\sqrt{4}}^1 &= \frac{\sigma}{2\omega} \partial_1 \operatorname{Log} \left(\frac{\omega^2}{\alpha\sigma} - 1 \right), \\ \Gamma_{\sqrt{3}}^2 &= \Gamma_{\sqrt{2}}^2 \sin^2 \theta = -\frac{B_1}{2} \sin \theta, \\ \Gamma_{\sqrt{4}}^2 &= \Gamma_{\sqrt{4}}^2 = -\frac{\omega}{2\alpha} A_1. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Calculons maintenant la partie symétrique de la connexion affine

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} + u_{\mu\nu}^\rho.$$

En ce qui concerne les symboles de Christoffel, on constate immédiatement, d'après les valeurs (89) des $\gamma_{\mu\nu}$, que les seuls symboles non nuls se réduisent aux neuf suivants

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right\} &= \frac{\alpha'}{2\alpha}, & \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 44 \end{array} \right\} &= \frac{\sigma'}{2\alpha}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 33 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 22 \end{array} \right\} \sin^2 \theta = -\frac{\beta'}{2\alpha} \sin^2 \theta, \\ \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 12 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 13 \end{array} \right\} = \frac{\beta'}{2\beta}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 33 \end{array} \right\} &= -\sin \theta \cos \theta, & \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 23 \end{array} \right\} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 14 \end{array} \right\} &= \frac{\sigma'}{2\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Quant à la portion $u_{\mu\nu}^\rho$ de la partie symétrique de la connexion affine, elle est donnée immédiatement par l'équation (I, § 2)

$$u_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \varphi_{\sigma\mu} - (\alpha'_{\mu\nu,\rho} = \gamma_{\rho\lambda} u_{\mu\nu}^\lambda). \quad (106)$$

D'après les valeurs (89) des $\varphi_{\mu\nu}$, on constate que huit seulement des 40 $u_{\mu\nu,\rho}$ ne sont pas nuls dans le cas particulier d'une solution statique à symétrie sphérique. Ces 8 $u_{\mu\nu,\rho}$ calculés à partir des formules (106) sont

$$\left. \begin{aligned} u_{22,1} &= 2\Gamma_{\sqrt{2}}^3 \varphi_{23}, & u_{33,1} &= 2\Gamma_{\sqrt{3}}^2 \varphi_{23}, \\ u_{44,1} &= -2\Gamma_{\sqrt{4}}^1 \varphi_{14}, \\ u_{12,2} &= -\Gamma_{\sqrt{2}}^2 \varphi_{23}, & u_{34,2} &= -(\Gamma_{\sqrt{3}}^1 \varphi_{14} + \Gamma_{\sqrt{4}}^2 \varphi_{23}), \\ u_{13,3} &= -\Gamma_{\sqrt{3}}^2 \varphi_{23}, \\ u_{24,3} &= \Gamma_{\sqrt{2}}^1 \varphi_{14} + \Gamma_{\sqrt{4}}^2 \varphi_{23}, \\ u_{11,4} &= \Gamma_{\sqrt{4}}^1 \varphi_{14}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

En remplaçant les $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ par leur valeur et en élevant

les indices, on trouve finalement

$$\left. \begin{aligned} u_{33}^1 &= u_{22}^1 \sin^2 \theta = \frac{f}{\alpha} B_1 \sin^2 \theta, \\ u_{44}^1 &= \frac{\sigma}{\alpha} \partial_1 \operatorname{Log} \left(\frac{\omega^2}{\alpha\sigma} - 1 \right), \\ u_{22}^2 &= u_{33}^2 = -\frac{f}{2\beta} B_1, \\ u_{34}^2 &= -u_{24}^2 \sin^2 \theta = \frac{\omega}{2\alpha} B_1 \sin \theta, \\ u_{14}^4 &= \frac{1}{2} \partial_1 \operatorname{Log} \left(\frac{\omega^2}{\alpha\sigma} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

La connexion affine

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} + u_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

se compose donc des symboles de Christoffel calculés en (105), du reste de la partie symétrique $u_{\mu\nu}^\rho$ calculé en (108) et de la partie antisymétrique calculée en (104). En groupant les $\left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ et les $u_{\mu\nu}^\rho$ pour bloquer en une seule expression $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ la partie symétrique de la connexion affine, on obtient finalement

Partie symétrique

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\alpha'}{2\alpha}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{\Gamma_{33}^1}{\sin^2 \theta} = \frac{f B_1 - \beta A_1}{2\alpha}, \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{\sigma}{2\alpha} \partial_1 \operatorname{Log} \sigma \left(\frac{\omega^2}{\alpha\sigma} - 1 \right)^2, \\ \Gamma_{23}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{32}^2 &= \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}, \\ \Gamma_{24}^2 &= \Gamma_{34}^2 = \frac{A_1}{2}, & \Gamma_{34}^2 &= -\sin^2 \theta \Gamma_{24}^2 = \frac{\omega B_1}{2\alpha} \sin \theta, \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \partial_1 \operatorname{Log} \sigma \left(\frac{\omega^2}{\alpha\sigma} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Partie antisymétrique

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{23}^1 &= -\Gamma_{32}^1 = \frac{\beta B_1 + f A_1}{2\alpha} \sin \theta, \\ \Gamma_{14}^1 &= \frac{\sigma}{2\omega} \partial_1 \operatorname{Log} \left(\frac{\omega^2}{\alpha\sigma} - 1 \right), \\ \Gamma_{34}^1 &= \Gamma_{24}^1 \sin^2 \theta = -\frac{B_1}{2} \sin \theta, \\ \Gamma_{24}^2 &= \Gamma_{34}^2 = -\frac{\omega}{2\alpha} A_1. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Telle est la valeur de la connexion affine dans le cas d'un champ statique à symétrie sphérique. Nous l'avons obtenue en appliquant notre solution générale à ce cas particulier. Elle constitue un test de la validité de la solution générale [(80) à (85)], car les valeurs particulières (109) et (110) ont été calculées par Bonnor [3] en partant directement des équations de base $\mathcal{G}_{\mu\nu;\rho} = 0$ dans le cas d'une solution statique à symétrie sphérique. Dans ce cas particulier les équations de base se simplifient et l'on

peut facilement les résoudre. Ainsi, la solution générale des équations d'Einstein calculée au paragraphe 5 et donnée par les équations (80), (81) et (85) nous conduit exactement dans le cas particulier examiné ici aux valeurs déterminées directement par Bonnor.

De même, la condition générale d'existence d'une solution, c'est-à-dire la condition (102), coïncide avec la condition établie par Bonnor dans ce cas particulier. Ici, elle se présente comme une application très restreinte de la condition générale d'existence (87) et permet donc d'étayer solidement celle-ci. On peut maintenant appliquer cette solution générale au calcul de la connexion affine dans un autre cas particulier : celui d'un champ à symétrie sphérique, mais non statique.

8. Application II : Calcul de la connexion affine dans le cas d'un champ à symétrie sphérique, mais non statique. — Le ds^2 et les $g_{\mu\nu}$ ont même forme qu'au paragraphe précédent. Ils sont donnés encore par les expressions (89) et (91) et les relations (90) sont toujours valables.

Ici, les $g_{\mu\nu}$ dépendent à la fois de r et de t . Désignons par $\partial_i = \frac{\partial}{\partial r}$ la dérivée par rapport à r et par $\partial_4 = \frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée par rapport à t . En ce qui concerne les $g_{\mu\nu}$, nous désignerons toujours par α' , β' , σ' , f' , m' les dérivées par rapport à r et nous introduirons les notations α , β , σ , f et w pour représenter les dérivées par rapport à t .

Partie symétrique :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\alpha'}{2\alpha}, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{\sigma}{2\sigma}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\Gamma_{33}^1}{\sin^2 \theta} = \frac{fB_1 - \beta A_1}{2\alpha}, & \Gamma_{22}^4 &= \frac{\Gamma_{33}^4}{\sin^2 \theta} = \frac{\beta A_4 - fB_4}{2\sigma}, \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{\sigma}{2\alpha} \partial_1 \text{Log} \sigma \left(1 - \frac{w^2}{\alpha\sigma}\right)^2, & \Gamma_{11}^4 &= \frac{\alpha}{2\sigma} \partial_4 \text{Log} \alpha \left(1 - \frac{w^2}{\alpha\sigma}\right)^2, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{\tan \theta}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{A_1}{2}, & \Gamma_{24}^2 &= \Gamma_{34}^3 = \frac{A_4}{2}, \\ \Gamma_{24}^3 &= -\Gamma_{34}^2 \sin^2 \theta = \frac{wB_4}{2\alpha} \sin \theta, & \Gamma_{31}^4 &= -\Gamma_{12}^3 \sin^2 \theta = \frac{wB_4}{2\sigma} \sin \theta, \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} \partial_1 \text{Log} \sigma \left(1 - \frac{w^2}{\alpha\sigma}\right), & \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \partial_4 \text{Log} \alpha \left(1 - \frac{w^2}{\alpha\sigma}\right). \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Partie antisymétrique :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{23}^1 &= -\Gamma_{32}^1 = \frac{\beta B_1 + fA_1}{2\alpha} \sin \theta, & \Gamma_{23}^4 &= -\Gamma_{32}^4 = -\left(\frac{\beta B_4 + fA_4}{2\sigma}\right) \sin \theta, \\ \Gamma_{14}^1 &= \frac{\sigma}{2w} \partial_1 \text{Log} \left(1 - \frac{w^2}{\alpha\sigma}\right), & \Gamma_{14}^4 &= -\frac{\alpha}{2w} \partial_4 \text{Log} \left(1 - \frac{w^2}{\alpha\sigma}\right), \\ \Gamma_{31}^2 &= \Gamma_{12}^3 \sin^2 \theta = -\frac{B_1}{2} \sin \theta, & \Gamma_{31}^4 &= -\Gamma_{12}^3 \sin^2 \theta = -\frac{B_4}{2} \sin \theta, \\ \Gamma_{24}^2 &= \Gamma_{34}^3 = -\frac{w}{2\alpha} A_1, & \Gamma_{24}^4 &= -\Gamma_{34}^3 = \frac{w}{2\sigma} A_4. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Le calcul de la connexion affine est exactement le même qu'au paragraphe précédent, mais les expressions $R_{\mu\nu\rho}$ non nulles qui sont à la base du calcul sont ici au nombre de 12 (et non de six comme précédemment). Ce sont

$$\begin{aligned} R_{23,1}^1, & R_{14,1}^1, & R_{23,1}^2, & R_{14,1}^2, & R_{21,2}^2 = R_{13,2}^2, \\ R_{21,2}^1 = R_{13,2}^1, & R_{24,2}^2 = R_{21,2}^2 \sin^2 \theta, & R_{13,2}^1 = R_{12,2}^1 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

A l'aide de ces expressions, on détermine la partie antisymétrique $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ de la connexion affine par les relations (80) et (84), puis la partie symétrique $u_{\mu\nu\rho}$ par la relation (106), les symboles de Christoffel étant calculés indépendamment. Nous ne reproduirons pas le détail du calcul qui est exactement celui du paragraphe précédent. En introduisant les notations de Bonnor élargies au cas non statique, c'est-à-dire en posant

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \partial_1 \text{Log} \beta^2 \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) = \frac{ff' + \beta\beta'}{f^2 + \beta^2}, \\ B_1 &= -\frac{\beta}{2f} \partial_1 \text{Log} \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) = \frac{f\beta' - \beta f'}{f^2 + \beta^2}; \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

et aussi

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{2} \partial_4 \text{Log} \beta^2 \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) = \frac{ff' + \beta\beta'}{f^2 + \beta^2}, \\ B_4 &= -\frac{\beta}{2f} \partial_4 \text{Log} \left(1 + \frac{f^2}{\beta^2}\right) = \frac{f\beta' - \beta f'}{f^2 + \beta^2}, \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

on obtient les 29 coefficients non nuls de la connexion affine. Ce sont les suivants :

Bien entendu, la condition d'existence dans ce cas particulier se réduit toujours à la condition (102) indiquée également par Bonnor [3].

Ces deux exemples sont destinés essentiellement à montrer la validité de la solution générale et son mode d'application dans les calculs de deux cas particuliers très classiques dont l'un, déjà connu, permettait des recoupements. Il serait souhaitable de l'utiliser maintenant au calcul de la connexion affine créée par une sphère en rotation.

Tous ces calculs sont rigoureux. Nous avons indiqué ces résultats en 1950 et, en outre, certaines conséquences rigoureuses et approchées qui résultent de la substitution de la solution générale dans les équations du champ $R_{\mu\nu} = 0$

Note I.

Par un calcul de déterminants sans difficultés, on peut établir la relation suivante :

$$\gamma\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\rho\lambda}\varphi_{\sigma\tau} = \frac{\gamma}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\rho\lambda}\varphi_{\sigma\tau} - \varphi\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\rho\sigma}. \quad (I.1)$$

Or, aux déterminants g , γ , φ relatifs aux éléments $g_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$, on peut faire correspondre les déterminants $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\varphi}$ relatifs aux éléments $g^{\mu\nu}$, $h^{\mu\nu}$, $f^{\mu\nu}$ (cf. (7), p. 4). A (I.1) correspond donc la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}h_{\lambda\tau}f^{\rho\lambda}f^{\sigma\tau} \\ = \frac{1}{2h}h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}h_{\lambda\tau}f^{\rho\lambda}f^{\sigma\tau} - \frac{1}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (I.2)$$

En remplaçant (13) dans (I.1) et (15) dans (I.2) on a donc

$$\begin{aligned} \gamma\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\rho\lambda}\varphi_{\sigma\tau} &= (g - \gamma - \varphi)\gamma^{\mu\nu} - \varphi\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\rho\sigma}, \quad (I.3) \\ \frac{1}{h}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}h_{\lambda\tau}f^{\rho\lambda}f^{\sigma\tau} &= \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f}\right)h^{\mu\nu} - \frac{1}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}, \quad (I.4) \end{aligned}$$

et, en multipliant (I.3) par $\gamma_{\mu\pi}\gamma_{\nu\epsilon}$, (I.4) par $h^{\mu\pi}h^{\nu\epsilon}$, les deux autres relations complémentaires

$$\begin{aligned} \varphi\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\rho\lambda}\varphi_{\sigma\tau} &= (g - \gamma - \varphi)\gamma_{\mu\nu} - \gamma\varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu\sigma}\gamma^{\rho\sigma}, \quad (I.5) \\ \frac{1}{f}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}h_{\lambda\tau}f^{\rho\lambda}f^{\sigma\tau} &= \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f}\right)h_{\mu\nu} - \frac{1}{h}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}. \quad (I.6) \end{aligned}$$

La multiplication de (I.3) par $\gamma_{\nu\epsilon}$ et de (I.4) par $h^{\nu\epsilon}$ nous conduit alors aux relations suivantes :

$$\gamma\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\rho\lambda}\varphi_{\epsilon\tau} = (g - \gamma - \varphi)\delta_{\epsilon}^{\mu} - \varphi\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\rho\sigma}\gamma_{\nu\epsilon}, \quad (I.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}h_{\mu\rho}h_{\lambda\tau}f^{\rho\lambda}f^{\epsilon\tau} \\ = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f}\right)\delta_{\epsilon}^{\mu} - \frac{1}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}h^{\nu\epsilon}, \quad (I.8) \end{aligned}$$

le même résultat étant d'ailleurs acquis en multipliant (I.5) par $\gamma^{\nu\epsilon}$ et (I.6) par $h_{\nu\epsilon}$. Contractons alors (I.7) et (I.8) en ϵ , μ . Il vient, en tenant compte de (13) et de (15) :

$$\gamma\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} = \varphi\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\rho\sigma} = 2(g - \gamma - \varphi), \quad (I.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} \\ = \frac{1}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\mu\nu}h^{\rho\sigma} = 2\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f}\right). \end{aligned} \quad (I.10)$$

En scindant (14) et (16) en parties symétrique et antisymétrique, on obtient :

$$(s) \quad h^{\mu\nu} = \frac{\gamma}{g}\gamma^{\mu\nu} + \frac{\varphi}{g}\gamma_{\rho\sigma}\varphi^{\nu\sigma}\varphi^{\mu\rho}, \quad (17)$$

$$(a) \quad f^{\mu\nu} = \frac{\varphi}{g}\varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{g}\gamma_{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma};$$

$$(s) \quad \gamma_{\mu\nu} = \frac{g}{h}h_{\mu\nu} + \frac{g}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}, \quad (18)$$

$$(a) \quad \varphi_{\mu\nu} = \frac{g}{f}f_{\mu\nu} + \frac{g}{h}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\rho\sigma}.$$

Notons que la multiplication (croisée) de (17 s) par (18 s) [ou de (17 a) par (18 a)] nous conduit à la condition suivante :

$$f(g^2 - \gamma h) = h(g^2 - f\varphi) \quad (I.11)$$

en tenant compte de (I.9) et de (I.10).

1° CALCUL DE $f_{\mu\nu}$ ET DE $\varphi^{\mu\nu}$. — En utilisant la définition (10) et la relation (17 a) on obtient :

$$f_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{f}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\rho\sigma} = \frac{\sqrt{f}}{2g}(\varphi\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} + \gamma\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\rho\lambda}\gamma^{\sigma\tau}\varphi_{\lambda\tau}),$$

c'est-à-dire d'après (8) et (12)

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{f}\varphi}{g}\varphi_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{f}}{2g}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}\gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\sigma}\varphi_{\lambda\tau} \\ &= \frac{\sqrt{f}\varphi}{g}(\varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\sigma}\varphi^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (I.12)$$

D'une manière analogue, en tenant compte de (8) et de (18 a) on a

$$\begin{aligned} \varphi^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} \\ &= \frac{g}{2\sqrt{\varphi}}\left(\frac{1}{f}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma} + \frac{1}{h}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}h_{\rho\lambda}h_{\sigma\tau}f^{\lambda\tau}\right) \\ &= \frac{g}{\sqrt{f}\varphi}f^{\mu\nu} + \frac{g}{2\sqrt{\varphi}}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\lambda\tau} \\ &= \frac{g}{\sqrt{f}\varphi}(f^{\mu\nu} + h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (I.13)$$

2° CALCUL DE $h_{\mu\nu}$ ET DE $\gamma^{\mu\nu}$. — Les relations (17 s) et (18 s) peuvent s'écrire encore

$$h_{\mu\nu} = \frac{h}{g}\gamma_{\mu\nu} - \frac{h}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}, \quad (I.14)$$

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{g}{\gamma}h^{\mu\nu} - \frac{\varphi}{\gamma}\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\rho\sigma}. \quad (I.15)$$

Remplaçons dans ces relations les $f_{\mu\rho}$ et les $\varphi^{\mu\rho}$ par les $h^{\rho\sigma}$ et $\gamma_{\rho\sigma}$ par leurs expressions (17 s) et (18 s). leurs valeurs (I.12) et (I.13) déjà déterminées, Il vient :

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \frac{h}{g} \gamma_{\mu\nu} - \frac{h\varphi}{g^3} (\varphi_{\mu\rho} + \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\rho q} \varphi^{pq}) (\varphi_{\nu\sigma} + \gamma_{\nu\sigma} \gamma_{\sigma s} \varphi^{rs}) (\gamma_{rs}^{\rho\sigma} + \varphi_{rs}^{\rho\sigma} \varphi^{\mu\nu}{}_{mn}) \\ &= \frac{h}{g} \gamma_{\mu\nu} - \frac{2h\gamma\varphi}{g^3} \gamma_{\mu\nu} - \frac{h\varphi^2}{g^3} \gamma_{\mu\nu} - \frac{h\gamma\varphi}{g^3} \varphi_{\mu\rho} \varphi_{\nu q} \gamma^{pq} - \left(\frac{h\gamma\varphi}{g^3} + \frac{2h\varphi^2}{g^3} \right) \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu m} \gamma_{qr} \varphi^{pq} \varphi^{mr} \\ &\quad - \frac{h\varphi^2}{g^3} \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\rho q} \gamma_{\nu r} \gamma_{rs} \gamma_{mn} \varphi^{pq} \varphi^{rs} \varphi_{rs}^{\rho\sigma} \varphi^{\mu\nu}{}_{mn}. \end{aligned}$$

En mettant en évidence l'antisymétrie en q, n , le dernier terme s'écrit

$$\begin{aligned} & - \frac{h\varphi^2}{2g^3} \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\rho q} \gamma_{\nu r} \gamma_{rs} \gamma_{mn} \varphi^{rs} \varphi_{rs}^{\rho\sigma} (\varphi^{pq} \varphi^{\sigma n} - \varphi^{pn} \varphi^{\sigma q} - \varphi^{p\sigma} \varphi^{qn} + \varphi^{p\sigma} \varphi^{qn}) \\ &= - \frac{h\varphi^2}{2g^3} \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\rho q} \gamma_{\nu r} \gamma_{rs} \gamma_{mn} \varphi^{rs} \varphi_{rs}^{\rho\sigma} \left(\frac{\varepsilon^{pq\sigma n}}{\sqrt{\varphi}} + \varphi^{p\sigma} \varphi^{qn} \right) \text{ d'après (9)} \\ &= - \frac{h\varphi^2}{2g^3} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\varphi}} \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\rho q} \gamma_{\nu r} \varepsilon_{\sigma n, m} \gamma^{rs} \gamma^{pq} \varphi^{rs} \varphi_{rs}^{\rho\sigma} \right) \\ &\quad - \frac{h\varphi^2}{2g^3} \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu r} \gamma_{rs} \varphi^{rs} \varphi_{rs}^{\rho\sigma} (\gamma_{\rho q} \gamma_{m n} \varphi^{\rho\sigma} \varphi^{qn}) \text{ d'après (12)} \\ &= \frac{h\gamma\varphi}{2g^3} \left(\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu s \rho m} \gamma_{\nu r} \varphi^{rs} \varphi_{rs}^{\rho\sigma} \right) - \frac{h\varphi}{g^3} (g - \gamma - \varphi) \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu r} \gamma_{rs} \varphi^{rs} \varphi^{\rho\sigma} \text{ d'après (I.9)}. \end{aligned}$$

Finalement en tenant compte de (8) et de (5) nous conduit alors aux conditions suivantes : ce dernier terme s'écrit donc :

$$\frac{h\gamma\varphi}{g^3} \gamma_{\mu\nu} - \frac{h\varphi}{g^3} (g - \gamma - \varphi) \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu r} \gamma_{rs} \varphi^{\rho\sigma} \varphi^{rs}$$

et l'expression de $h_{\mu\nu}$ se réduit à

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \left(\frac{h}{g} - \frac{h\gamma\varphi}{g^3} - \frac{h\varphi^2}{g^3} \right) \gamma_{\mu\nu} - \frac{h\gamma\varphi}{g^3} \varphi_{\mu\rho} \varphi_{\nu q} \gamma^{pq} \\ &\quad - \frac{h\varphi}{g^3} (g + \varphi) \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu m} \gamma_{qr} \varphi^{pq} \varphi^{mr}. \end{aligned}$$

Mais, d'après (I.5) ce dernier terme s'écrit encore

$$- \frac{h}{g^3} (g + \varphi) [(g - \gamma - \varphi) \gamma_{\mu\nu} - \gamma \varphi_{\mu\rho} \varphi_{\nu q} \gamma^{pq}]$$

En substituant sa valeur, on a donc finalement

$$h_{\mu\nu} = \frac{h\gamma}{g^2} (\gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\rho} \varphi_{\nu q} \gamma^{pq}). \quad (\text{I.16})$$

Un calcul tout à fait semblable à celui-ci nous conduirait à partir de (I.15) à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} &= \frac{g}{\gamma} h^{\mu\nu} - \frac{g^3}{\gamma f} (f^{\mu\rho} + h^{\mu\rho} h^{\rho q} f_{\rho q}) \\ &\quad \times (f^{\nu\sigma} + h^{\nu\sigma} h^{\sigma s} f_{rs}) \left(\frac{1}{h} h_{\rho\sigma} + \frac{1}{f} f_{\rho m} f_{\sigma n} h^{mn} \right) \\ &= \frac{g^2}{h\gamma} (h^{\mu\nu} + f^{\mu\rho} f^{\nu q} h_{\rho q}) \quad (\text{I.17}) \end{aligned}$$

en nous servant au cours du calcul des relations (11), (17 a), (I.10) et (I.6).

La multiplication membre à membre de (17 s) par (I.16) et de (17 a) par (I.12) [ou, ce qui revient au même, de (18 s) par (I.17) et de (18 a) par (I.13)],

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{g^3}{\gamma h^2} (4 + f^{\mu\rho} f^{\nu q} h_{\mu\nu} h_{\rho q}) \\ &\quad + \frac{g^3}{\gamma f h} (f^{\mu\rho} f^{\nu q} h^{\mu\nu} h^{\rho q} + 4) \\ &= \frac{g^3}{\gamma h^2} \left[4 + 2h \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f} \right) \right] \\ &\quad + \frac{g^3}{\gamma f h} \left[2f \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f} \right) + 4 \right] \text{ d'après (I.10)}. \end{aligned}$$

ou

$$g^2 = \gamma h, \quad (\text{I.18})$$

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{g}{\sqrt{f\varphi}} \left(\frac{4g}{f} + \frac{g}{h} h_{\mu\rho} h_{\nu q} f^{\mu\nu} f^{\rho q} + \frac{g}{f} h_{\mu\rho} h_{\nu q} f^{\mu\nu} f^{\rho q} + \frac{4g}{h} \right) \\ &= \frac{g}{\sqrt{f\varphi}} \left[\frac{4g}{f} + 2g \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2g \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{h} - \frac{1}{f} \right) + \frac{4g}{h} \right] \text{ d'après (I.10)}. \end{aligned}$$

ou

$$g^2 = f\varphi. \quad (\text{I.19})$$

Notons que ces conditions (I.18) et (I.19) sont telles que la condition (I.11) se trouve automatiquement vérifiée.

En substituant les conditions :

$$g^2 = \gamma h = f\varphi \quad (\text{I.20})$$

dans (I.12), (I.13), (I.16) et (I.17) on obtient alors

$$(s) \quad h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\rho} \varphi_{\nu\sigma} \gamma^{\rho\sigma}, \quad (\text{I.21})$$

$$(a) \quad f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\nu\sigma} \varphi^{\rho\sigma},$$

$$(s) \quad \gamma^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\rho} f^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}, \quad (\text{I.22})$$

$$(a) \quad \varphi^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} + h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} f_{\rho\sigma}.$$

Notons qu'en tenant compte de (I.3), (I.4),

(I.5) et (I.6) toutes les relations (s) (17), (18), (I.21) et (I.22) peuvent s'écrire encore :

$$\left. \begin{aligned} h^{\mu\nu} &= \left(1 - \frac{\varphi}{g}\right) \gamma^{\mu\nu} - \frac{\gamma}{g} \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} \gamma^{\lambda\tau} \varphi_{\rho\lambda} \varphi_{\sigma\tau}, \\ \gamma^{\mu\nu} &= \left(1 - \frac{g}{f}\right) h^{\mu\nu} - \frac{g}{h} h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} h^{\lambda\tau} f_{\rho\lambda} f_{\sigma\tau}, \\ h_{\mu\nu} &= \frac{g}{\gamma} \left(1 - \frac{\varphi}{g}\right) \gamma_{\mu\nu} - \frac{\varphi}{\gamma} \gamma_{\mu\sigma} \gamma_{\nu\sigma} \gamma_{\lambda\tau} \varphi^{\rho\lambda} \varphi^{\sigma\tau}, \\ \gamma_{\mu\nu} &= \frac{h}{g} \left(1 - \frac{g}{f}\right) h_{\mu\nu} - \frac{h}{f} h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} h^{\lambda\tau} f_{\rho\lambda} f_{\sigma\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.23})$$

Note II.

Formons d'abord

$$A_{\bar{\rho}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\lambda\mu} \varphi_{\mu\pi} \gamma^{\pi\delta} A_{\delta}.$$

En changeant τ en λ , σ en μ , on a

$$\begin{aligned} A_{\bar{\rho}} &= \frac{1}{2} (\varphi_{\rho\sigma} \varphi_{\mu\pi} - \varphi_{\rho\mu} \varphi_{\sigma\pi} - \varphi_{\rho\pi} \varphi_{\mu\sigma}) \gamma^{\sigma\tau} \gamma^{\lambda\mu} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\pi\delta} A_{\delta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_{\rho\pi} \varphi_{\mu\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \gamma^{\lambda\mu} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\pi\delta} A_{\delta}. \end{aligned}$$

Mais, d'après la valeur de φ [cf. (9)] et d'après (13),

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho\sigma} \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\rho\mu} \varphi_{\sigma\nu} - \varphi_{\rho\nu} \varphi_{\mu\sigma} &= \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}, \\ \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\tau} \gamma^{\lambda\mu} \varphi_{\mu\sigma} \varphi_{\tau\lambda} &= -\frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi). \end{aligned}$$

Donc

$$A_{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\pi} \gamma^{\sigma\tau} \gamma^{\lambda\mu} \varphi_{\tau\lambda} \gamma^{\pi\delta} A_{\delta} - \frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi) A_{\bar{\rho}},$$

c'est-à-dire, d'après (12), (5) et (8)

$$\left. \begin{aligned} A_{\bar{\rho}} &= \frac{\sqrt{\varphi}}{2\gamma} \varepsilon^{\mu\pi\lambda\delta} \gamma_{\rho\mu} \gamma_{\sigma\pi} \gamma^{\sigma\tau} \varphi_{\tau\lambda} A_{\delta} - \frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi) A_{\bar{\rho}} \\ &= \frac{\sqrt{\varphi}}{2\gamma} \varepsilon^{\mu\tau\lambda\delta} \gamma_{\rho\mu} \varphi_{\tau\lambda} A_{\delta} - \frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi) A_{\bar{\rho}} \\ &= \frac{\varphi}{\gamma} \gamma^{\mu\delta} \gamma_{\rho\mu} A_{\delta} - \frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi) A_{\bar{\rho}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.4})$$

Passons maintenant à $A_{\bar{\rho}}$.

$$A_{\bar{\rho}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} A_{\bar{\tau}}.$$

Mais, d'après (II.1),

$$A_{\bar{\rho}} = \frac{\varphi}{\gamma} \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} \gamma_{\tau\mu} \varphi^{\mu\delta} A_{\delta} - \frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi) \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\tau} A_{\bar{\tau}}$$

ou, en tenant compte de (5)

$$A_{\bar{\rho}} = -\frac{\varphi}{\gamma} A_{\rho} - \frac{1}{\gamma} (g - \gamma - \varphi) A_{\bar{\rho}}.$$

Note III.

Le 1^{er} et le 3^e terme de (49) s'écrivent avec les notations (50) et (51)

$$\begin{aligned} &\gamma^{\sigma\lambda} (\Gamma_{\bar{\nu}\lambda}^{\tau} \varphi_{\tau\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\bar{\nu}\lambda}^{\tau} \varphi_{\tau\rho} \varphi_{\sigma\mu}) \\ &= -\gamma^{\sigma\lambda} (\Gamma_{\bar{\mu}\lambda}^{\tau} \varphi_{\tau\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\bar{\nu}\lambda}^{\tau} \varphi_{\tau\rho} \varphi_{\sigma\mu}) \\ &= -\gamma^{\sigma\lambda} (\bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}_{\bar{\nu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\mu}) \\ &\quad + \gamma^{\sigma\lambda} (\Gamma_{\bar{\rho}\bar{\mu}\lambda}^{\tau} \varphi_{\sigma\nu} + \Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\mu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\bar{\rho}\bar{\nu}\lambda}^{\tau} \varphi_{\sigma\mu} - \Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\mu}) \\ &= -\gamma^{\sigma\lambda} (\bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}_{\bar{\nu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\mu}) \\ &\quad - (\Gamma_{\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}} - \Gamma_{\bar{\rho}\bar{\nu}\bar{\mu}}) + \gamma^{\sigma\lambda} (\Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\mu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\mu}) \\ &= -\gamma^{\sigma\lambda} (\bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}_{\bar{\nu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\mu}) \\ &\quad - \bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\nu\rho} + \Gamma_{\bar{\mu}\nu\bar{\rho}} + \gamma^{\sigma\lambda} (\Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\mu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\mu}). \end{aligned}$$

En groupant avec le 2^e et le 4^e terme de (49), cette équation s'écrit donc

$$\begin{aligned} &u_{\bar{\mu}\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\nu} - u_{\bar{\nu}\rho}^{\sigma} \varphi_{\sigma\mu} \\ &= -\gamma^{\sigma\lambda} (\bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}_{\bar{\nu}\lambda\rho} \varphi_{\sigma\mu}) - \bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\nu\rho} + \Gamma_{\bar{\mu}\nu\bar{\rho}} \\ &\quad + 2\gamma^{\sigma\lambda} (\Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\mu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\nu} - \Gamma_{\bar{\lambda}\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\tau} \varphi_{\sigma\mu}). \end{aligned}$$

Note IV.

Par définition [(50) et (51)] :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{\mu}\nu\rho} &= \Gamma_{\bar{\mu}\nu\bar{\rho}} + \Gamma_{\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}} + \Gamma_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\mu}} \\ &= \gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\rho\sigma} \Gamma_{\bar{\mu}\nu\lambda}^{\tau} + \varphi_{\nu\sigma} \Gamma_{\bar{\rho}\bar{\mu}\lambda}^{\tau} + \varphi_{\mu\sigma} \Gamma_{\bar{\nu}\bar{\rho}\lambda}^{\tau}). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que cette expression s'écrit encore ($\mu \neq \nu \neq \rho$)

$$\bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\nu\rho} = -(\varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\rho} + \varphi_{\rho\mu} \Gamma_{\nu} + \varphi_{\nu\rho} \Gamma_{\mu}) + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\lambda\sigma} \varphi^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta,\sigma},$$

c'est-à-dire, d'après la définition (57)

$$\bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\nu\rho} = -(\varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\rho} + \varphi_{\rho\mu} \Gamma_{\nu} + \varphi_{\nu\rho} \Gamma_{\mu}) + \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\lambda\sigma} B_{\sigma}.$$

Note V.

On a, en tenant compte des définitions (50) et (9)

$$\begin{aligned} &\gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\sigma\nu} \Gamma_{\bar{\rho}\bar{\mu}\lambda}^{\tau} - \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_{\bar{\rho}\bar{\nu}\lambda}^{\tau}) \\ &= \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} (\varphi_{\sigma\nu} \varphi_{\mu\tau} - \varphi_{\sigma\mu} \varphi_{\nu\tau}) \Gamma_{\bar{\rho}\lambda,\pi} \\ &= \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} (\varphi_{\sigma\nu} \varphi_{\mu\tau} - \varphi_{\sigma\mu} \varphi_{\nu\tau} - \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu}) \Gamma_{\bar{\rho}\lambda,\pi} \\ &\quad + \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\bar{\rho}\lambda,\pi} \\ &= \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\tau} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \Gamma_{\bar{\rho}\lambda,\pi} + \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu} (\Gamma_{\bar{\rho}\lambda,\pi} + \Gamma_{\bar{\nu}\rho,\lambda}) \\ &= \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\tau} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \Gamma_{\bar{\rho}\lambda,\pi} - \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\tau} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \Gamma_{\bar{\lambda}\pi,\rho} \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\bar{\rho}\lambda,\pi} - \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\bar{\lambda}\pi,\rho}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les définitions (55) et (56) de $\Gamma_{\mu\nu,\rho}^*$ et de A_ρ

$$\begin{aligned} & \gamma^{\sigma\lambda} (\varphi_{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\mu}} - \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\nu}}) \\ &= -\frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} (\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} - \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu}) \Gamma_{\rho\lambda\pi} \\ & \quad - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\mu\nu,\rho}^* - \varphi_{\mu\nu} A_\rho. \end{aligned}$$

Note VI.

D'après les définitions (50) et (51)

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} &= \Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}} + \Gamma_{\rho\mu,\bar{\nu}} + \Gamma_{\nu\rho,\bar{\mu}} \\ &= \varphi_{\sigma\lambda} \gamma^{\lambda\tau} \gamma^{\pi\sigma} (\varphi_{\rho\pi} \Gamma_{\mu\nu,\tau} + \varphi_{\nu\pi} \Gamma_{\rho\mu,\tau} + \varphi_{\mu\pi} \Gamma_{\nu\rho,\tau}). \end{aligned}$$

Mais, d'après la définition (17) de $f^{\mu\nu}$ et la relation (5)

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} &= \left(\frac{\mathcal{G}}{\gamma} f^{\pi\tau} - \frac{\varphi}{\gamma} \varphi^{\pi\tau} \right) \\ & \quad \times (\varphi_{\rho\pi} \Gamma_{\mu\nu,\tau} + \varphi_{\nu\pi} \Gamma_{\rho\mu,\tau} + \varphi_{\mu\pi} \Gamma_{\nu\rho,\tau}) \\ &= \frac{\mathcal{G}}{\gamma} f^{\pi\tau} (\varphi_{\rho\pi} \Gamma_{\mu\nu,\tau} + \varphi_{\nu\pi} \Gamma_{\rho\mu,\tau} + \varphi_{\mu\pi} \Gamma_{\nu\rho,\tau}) \\ & \quad + \frac{\varphi}{\gamma} \Gamma_{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \quad (VI.4)$$

Or, on vérifie facilement que pour une permutation circulaire μ, ν, ρ .

$$\begin{aligned} & f^{\pi\tau} (\varphi_{\rho\pi} \Gamma_{\mu\nu,\tau} + \varphi_{\nu\pi} \Gamma_{\rho\mu,\tau} + \varphi_{\mu\pi} \Gamma_{\nu\rho,\tau}) \\ &= \frac{1}{2} f^{\pi\tau} (\varphi_{\mu\nu} \Gamma_{\pi\tau,\rho} + \varphi_{\rho\mu} \Gamma_{\pi\tau,\nu} + \varphi_{\nu\rho} \Gamma_{\pi\tau,\mu}) \\ & \quad - \frac{1}{2} f^{\pi\tau} \varphi_{\pi\tau} \Gamma_{\mu\nu\rho} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi_{\pi\sigma} f^{\pi\lambda} \Gamma^{+\sigma} - \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} f^{\sigma\lambda} \varphi^{\pi\tau} \Gamma_{\pi\tau,\sigma} \end{aligned}$$

en posant

$$\Gamma^{+\sigma} = \frac{1}{6} \varepsilon^{\sigma\alpha\beta\delta} \Gamma_{\alpha\beta\delta}.$$

Revenons maintenant aux notations en $\varphi^{\mu\nu}$, toujours à l'aide de la définition (17a). En utilisant aussi les définitions (56) et (57) de A_ρ et de B_ρ , on trouve

$$\begin{aligned} & f^{\pi\tau} (\varphi_{\rho\pi} \Gamma_{\mu\nu,\tau} + \varphi_{\nu\pi} \Gamma_{\rho\mu,\tau} + \varphi_{\mu\pi} \Gamma_{\nu\rho,\tau}) \\ &= \frac{\varphi}{\mathcal{G}} (\varphi_{\mu\nu} B_\rho + \varphi_{\rho\mu} B_\nu + \varphi_{\nu\rho} B_\mu) \\ & \quad + \frac{\gamma}{\mathcal{G}} (\varphi_{\mu\nu} A_\rho + \varphi_{\rho\mu} A_\nu + \varphi_{\nu\rho} A_\mu) \\ & \quad - 2 \frac{\varphi}{\mathcal{G}} \Gamma_{\mu\nu\rho} - \left(1 - \frac{\gamma}{\mathcal{G}} - \frac{\varphi}{\mathcal{G}} \right) \Gamma_{\mu\nu\rho} \\ & \quad - \frac{\varphi}{\mathcal{G}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma^{+\sigma} - \frac{\gamma}{\mathcal{G}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi_{\pi\sigma} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} \Gamma^{+\sigma} \\ & \quad - \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \left(\frac{\varphi}{\mathcal{G}} \varphi^{\sigma\lambda} - \frac{\gamma}{\mathcal{G}} \gamma^{\sigma\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} \right) B_\sigma. \end{aligned}$$

D'où, en substituant dans (VI.1)

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} &= \left(1 - \frac{\mathcal{G}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) \Gamma_{\mu\nu\rho} + \frac{\varphi}{\gamma} (\varphi_{\mu\nu} B_\rho + \varphi_{\rho\mu} B_\nu + \varphi_{\nu\rho} B_\mu) \\ & \quad + (\varphi_{\mu\nu} A_\rho + \varphi_{\rho\mu} A_\nu + \varphi_{\nu\rho} A_\mu) - \sqrt{\varphi} \frac{\varphi}{\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi^{\sigma\lambda} B_\sigma \\ & \quad - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi_{\pi\sigma} \gamma^{\pi\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} \Gamma^{+\sigma} - \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\sigma\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} B_\sigma. \end{aligned}$$

Mais, en tenant compte des identités (cf. 8)

$$\begin{aligned} & - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi_{\pi\sigma} \gamma^{\pi\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} \Gamma^{+\sigma} \\ &= - \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varphi_{\pi\sigma} \gamma^{\pi\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} \varepsilon^{\sigma\delta\tau\epsilon} \Gamma_{\epsilon\delta\tau} \\ &= \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\pi\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\sigma\tau} \Gamma_{\pi\sigma\tau} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} A_\rho + \varphi_{\rho\mu} A_\nu + \varphi_{\nu\rho} A_\mu &= \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} A_\lambda, \\ \varphi_{\mu\nu} B_\rho + \varphi_{\rho\mu} B_\nu + \varphi_{\nu\rho} B_\mu &= \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} B_\lambda, \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} &= \left(1 - \frac{\mathcal{G}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) \Gamma_{\mu\nu\rho} \\ & \quad + \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\varphi^{\lambda\sigma} A_\lambda + \gamma^{\lambda\alpha} \gamma^{\sigma\beta} \varphi_{\alpha\beta} B_\lambda) \\ & \quad + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\pi\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\sigma\tau} \Gamma_{\pi\sigma\tau}. \end{aligned}$$

Note VII.

Multiplications (E) par $\frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu}$ et contractions. Nous avons, compte tenu de (5) et de la définition (57) de B_ρ

$$\begin{aligned} B_\rho - 2 \gamma^{\sigma\lambda} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\sigma}} + B_{\bar{\rho}} - \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} \\ = -\frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \hat{D}_\rho \varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (VII.1)$$

Mais, d'après les définitions (50) et (51) de $\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho}$ et de $\Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho} &= -\frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu,\bar{\rho}} + \Gamma_{\rho\mu,\bar{\nu}} + \Gamma_{\nu\rho,\bar{\mu}}) \\ &= -B_{\bar{\rho}} - \varphi^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\mu,\bar{\nu}} \\ &= -B_{\bar{\rho}} - \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\nu\sigma} \gamma^{\sigma\lambda} \Gamma_{\rho\mu,\bar{\lambda}} \\ &= -B_{\bar{\rho}} + \gamma^{\sigma\lambda} \Gamma_{\rho\sigma,\bar{\lambda}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire en substituant dans (VII.1) et en tenant compte de la définition (50)

$$B_\rho - \gamma^{\sigma\lambda} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\sigma}} = -\frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \hat{D}_\rho \varphi_{\mu\nu}$$

ou

$$\begin{aligned} B_\rho - \gamma^{\sigma\lambda} \varphi_{\sigma\mu} \gamma^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\lambda,\bar{\nu}} \\ = B_\rho - \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \varphi_{\sigma\mu} \gamma^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\lambda,\bar{\nu}} + \Gamma_{\nu\lambda,\bar{\rho}} + \Gamma_{\lambda\nu,\bar{\rho}}) \\ + \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \varphi_{\sigma\mu} \gamma^{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\nu,\bar{\rho}} = -\frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \hat{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} \end{aligned}$$

ou, d'après la définition (56) de A_ρ

$$B_\rho + A_\rho - \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\mu\nu} \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_{\lambda\nu\rho} = -\frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} \hat{D}_\rho \varphi_{\mu\nu}.$$

Note VIII.

En remplaçant A_ρ et B_ρ par leurs valeurs dans (63) on obtient :

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\bar{\rho}} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \Gamma_{\mu\nu\rho}^* = R_{\mu\nu\rho},$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho} = & -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho} + \hat{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\tau\pi} \left(\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} - \varphi_{\sigma\tau} \varphi_{\mu\nu} \right) \varphi_{\rho\lambda\pi} \\ & - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} \right) \varphi_{\mu\nu\rho} \\ & - \frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^{\alpha\sigma} \gamma^{\lambda\tau} \varphi_{\sigma\tau} \varphi^{\beta\delta} \varphi_{\alpha\beta\delta} \\ & + \frac{\sqrt{\varphi}}{4} \gamma^{\sigma\lambda} \gamma^{\pi\tau} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \varphi_{\sigma\rho} \left(\varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta\tau} - 2\partial_\tau \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\rho} \varphi^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi_{\beta\tau} + \partial_\tau \varphi_{\alpha\beta} + \partial_\beta \varphi_{\tau\alpha}) + \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^* \\ = & \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \left\{ \varphi_{\sigma\rho} \frac{1}{2} \partial_\tau \varphi + \varphi^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_{\sigma\rho} \varphi_{\tau\alpha} + \partial_\tau \varphi_{\sigma\rho} \right\} + \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^* \\ = & \frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \left\{ \varphi_{\sigma\rho} \partial_\tau \text{Log} \varphi + \varphi^{\alpha\beta} \partial_\beta (\varphi_{\sigma\rho} \varphi_{\tau\alpha} - \varphi_{\tau\rho} \varphi_{\sigma\alpha} - \varphi_{\alpha\rho} \varphi_{\tau\sigma}) + \partial_\rho \varphi_{\tau\sigma} + \partial_\sigma \varphi_{\rho\tau} + \partial_\tau \varphi_{\sigma\rho} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\tau\sigma} (\partial_\beta \varphi_{\alpha\rho} + \partial_\rho \varphi_{\beta\alpha} + \partial_\alpha \varphi_{\rho\beta}) + \frac{1}{2} \varphi_{\tau\sigma} \varphi^{\alpha\beta} \partial_\rho \varphi_{\alpha\beta} \right\} + \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^* \\ = & \frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \left\{ \frac{1}{2} (\varphi_{\sigma\rho} \partial_\tau + \varphi_{\tau\sigma} \partial_\rho + \varphi_{\rho\tau} \partial_\sigma) \text{Log} \varphi - \varepsilon_{\sigma\tau\rho\alpha} \varphi^{\alpha\beta} \partial_\beta \sqrt{\varphi} - \varphi_{\sigma\tau\rho} + \frac{1}{2} \varphi_{\sigma\tau} \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta\rho} \right\} + \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^*. \end{aligned} \tag{VIII.2}$$

Cela, en tenant compte de l'antisymétrie en σ, τ et des relations (5), (9).

Mais on sait que

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma\rho} \partial_\tau + \varphi_{\tau\sigma} \partial_\rho + \varphi_{\rho\tau} \partial_\sigma &= \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\sigma\tau\alpha} \varphi^{\beta\alpha} \partial_\beta \\ &= \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\sigma\tau\alpha} \varphi^{\alpha\beta} \partial_\beta. \end{aligned} \tag{VIII.3}$$

L'expression (VIII.2) se réduit donc à

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^* + \frac{\sqrt{\varphi}}{4\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta\rho} + \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^* \\ &= \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^* + \frac{\sqrt{\varphi}}{4\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta\rho}. \end{aligned}$$

Enfin, le 8^e terme de (VIII.1) s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\rho} \partial_\tau \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}} \\ &= -\frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} (\varphi_{\sigma\rho} \partial_\tau + \varphi_{\tau\sigma} \partial_\rho + \varphi_{\rho\tau} \partial_\sigma) \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}} \\ &= -\frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\tau} \partial_\rho \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} \gamma^{\alpha\pi} \gamma^{\beta\tau} \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\pi\tau\lambda} \\ & + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} \\ & + \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\pi} \gamma^{\beta\lambda} \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\pi\lambda\rho} - \varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda} \left[\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma_\lambda \right. \\ & \left. + \varphi_{\lambda\rho} (\varphi_{\mu\nu} \Gamma_\sigma + \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_\nu + \varphi_{\nu\sigma} \Gamma_\mu) \right]. \end{aligned} \tag{VIII.4}$$

Le 4^e et le 11^e terme de cette relation se détruisent l'un l'autre.

Le 9^e terme s'écrit

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} \gamma^{\alpha\pi} \gamma^{\beta\tau} \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\pi\tau\lambda} \\ &= +\frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\tau\pi} \varphi_{\tau\pi\lambda} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\sigma} \varphi_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \varphi_{\mu\nu\rho} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\sigma} \varphi_{\lambda\sigma} \varphi_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\alpha\lambda} \gamma^{\beta\sigma} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\tau\pi} \varphi_{\tau\pi\lambda} - \frac{1}{2\gamma} (\mathcal{E} - \gamma - \varphi) \varphi_{\mu\nu\rho}, \end{aligned}$$

d'après (13). Ce terme disparaît donc avec le 5^e et le 6^e terme de (VIII.1). Le 3^e et le 7^e terme de (VIII.1) se groupent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &= -\frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \sqrt{\varphi} \varepsilon_{\tau\sigma\rho\beta} \varphi^{\alpha\beta} \partial_\alpha \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}} \\ &= -\frac{\sqrt{\varphi}}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\pi} \gamma^{\lambda\sigma} \gamma^{\pi\tau} \varphi_{\sigma\tau} \partial_\rho \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}} \\ &= +\frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}} \varepsilon_{[\mu\nu]\rho\beta}^* \varphi^{\sigma\beta} \partial_\alpha \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}} - \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \text{Log} \frac{\varphi}{\mathcal{E}}, \end{aligned}$$

en tenant compte toujours de (VIII.3) et des définitions (72).

$R_{\mu\nu\rho}$ s'écrit donc finalement

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho} = & -\frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\rho} + \hat{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[\mu\nu]\rho}^* \\ & + \frac{\sqrt{\varphi}}{4\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\sigma\tau} \varphi_{\sigma\tau\rho} \\ & - \varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} \\ & - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}} \varepsilon_{[\mu\nu]\rho\lambda}^* \varphi^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda} \left[\sqrt{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma_\lambda + \varphi_{\lambda\rho} (\varphi_{\mu\nu} \Gamma_\sigma + \varphi_{\sigma\mu} \Gamma_\nu + \varphi_{\nu\sigma} \Gamma_\mu) \right]. \end{aligned}$$

Note IX.

Pour calculer les $R_{\mu\nu\rho}$ remarquons que, d'après la valeur (89) des $\gamma_{\mu\nu}$ et des $\varphi_{\mu\nu}$ dans le cas statique à symétrie sphérique, le seul $\varphi_{\mu\nu\rho}$ non nul est φ_{123} ; les seuls $\varphi_{[\mu\nu]\rho}^*$ non nuls sont donc $\varphi_{[34]3}^*$, $\varphi_{[34]2}^*$, $\varphi_{[34]1}^*$. D'autre part, le seul f_μ non nul est f_4 ($\sqrt{-g}f^4 = \partial_1 \sqrt{-g}f^{41}$) et, par conséquent, le seul Γ_u non identiquement nul est Γ_4 [cf. (38)]. Aussi d'après (80) les seuls $R_{\mu\nu\rho}$ non identiquement nuls sont les suivants

$$R_{23,1} = -\frac{1}{2} \varphi_{123} + \frac{\partial_1 \varphi_{23}}{2\sqrt{-\gamma}} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{23}^* \left(\varphi^{23} \varphi_{123} + \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} \right) + \left(\frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varphi^{14} - \varphi_{23} \right) \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \gamma^{44} (\sqrt{\varphi} + \varphi_{41} \varphi_{23}) \Gamma_4,$$

$$R_{14,1} = \frac{\partial_1 \varphi_{14}}{2\sqrt{-\gamma}} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{14}^* \left(\varphi^{23} \varphi_{123} + \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} \right) - \varphi_{14} \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{\varphi}{2} \gamma^{22} \gamma^{33} \varphi^{14} \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi},$$

$$R_{31,2} = -\frac{1}{2} \varphi_{123} - \left\{ \frac{2}{12} \right\} \varphi_{32} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varphi^{14} \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \sqrt{\varphi} \gamma^{44} \Gamma_4,$$

$$R_{21,2} = -\left\{ \frac{1}{22} \right\} \varphi_{11} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi_{12,2}^* - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}} \varepsilon_{[24]12}^* \varphi^{14} \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} + \gamma^{33} \varphi_{32} \varphi_{23} \Gamma_4,$$

$$R_{12,3} = -\frac{1}{2} \varphi_{123} - \left\{ \frac{3}{13} \right\} \varphi_{32} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \varphi^{14} \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\gamma} + \sqrt{\varphi} \gamma^{44} \Gamma_4,$$

$$R_{34,3} = -\left\{ \frac{1}{33} \right\} \varphi_{14} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}} \varphi_{[34]3}^* - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}} \varepsilon_{[34]34}^* \varphi^{14} \partial_1 \text{Log} \frac{\mathcal{E}}{\varphi} + \gamma^{22} \varphi_{23} \varphi_{23} \Gamma_4.$$

D'après les valeurs des $\gamma_{\mu\nu}$ et des $\varphi_{\mu\nu}$, on voit que l'on a

$$R_{12,3} = R_{31,2}, \quad R_{34,3} = R_{24,2} \sin^2 \theta.$$

D'autre part

$$f^4 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_1 (\sqrt{-g} f^{41}) = \frac{1}{(\alpha\sigma - \omega^2)^{\frac{1}{2}} (\beta^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_1 \frac{\omega (\beta^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\sigma - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

car

$$f^{41} = \frac{\varphi}{g} \varphi^{41} + \frac{\gamma}{g} \gamma^{44} \gamma^{11} \varphi_{41} = \frac{\omega}{\alpha\sigma - \omega^2}.$$

On aura donc

$$f_4 = \gamma_{44} f^4, \quad f_4 = \varphi_{41} \gamma^{11} \varphi_{14} \gamma^{44} f_4 = \frac{\omega^2}{\alpha\sigma} f_4,$$

d'où

$$\Gamma_4 = f_4 - f_4 = \frac{\sigma(\alpha\sigma - \omega^2)}{\alpha\sigma(\alpha\sigma - \omega^2)^{\frac{1}{2}} (\beta^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_1 \frac{\omega (\beta^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\sigma - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega}{\alpha} \partial_1 \text{Log} \frac{\omega (\beta^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\sigma - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En remplaçant les $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu\rho}$ et Γ_4 par leurs valeurs dans les expressions ci-dessus, on obtient

$$R_{23,1} = -\frac{1}{2} f \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma} \right) \sin \theta \partial_1 \text{Log} \frac{(\alpha\sigma - \omega^2)(f^2 + \beta^2)}{(\alpha\sigma + \omega^2)f},$$

$$R_{14,1} = \frac{\omega}{2} \left[\partial_1 \text{Log} \frac{\omega^2}{\alpha\sigma} + \frac{f^2}{\beta^2} \partial_1 \text{Log} f^2 - 2 \partial_1 \text{Log} \frac{(\alpha\sigma - \omega^2)(f^2 + \beta^2)}{\alpha\sigma\beta^2} \right],$$

$$R_{31,2} = R_{12,3} = \frac{1}{2} f \sin \theta \left[\partial_1 \text{Log} \frac{\beta}{f} \frac{(\beta^2 + f^2)}{\beta^2} + \frac{\omega^2}{\alpha\sigma} \partial_1 \text{Log} (\beta^2 + f^2) \right],$$

$$R_{34,3} = \frac{R_{24,2}}{\sin^2 \theta} = \frac{\omega}{2} \frac{f^2}{\alpha\sigma^2} \left[\left(1 + \frac{\beta^2}{f^2} \right) \partial_1 \text{Log} \beta - \partial_1 \text{Log} \frac{(\beta^2 + f^2)^2}{f^2} \frac{\beta}{f} \right].$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] TONNELAT M. A. — C. R. Acad. Sc., 1950, **230**, 183; J. Physique, 1952, **13**, 177 et 1951, **12**, 81.
[2] Voir par exemple, HLAVALY. J. Rat. Mech. Anal., 1953, 2 n° 1, p. 1-52.

- [3] BONNOR. — Proc. Roy. Soc., 1952, **210**, 427.
[4] PAPAPETROU. — Proc. Roy. I. Acad., 1948, 52 A, 69.

ÉTUDE DE LA DÉSINTÉGRATION DU $^{204}_{81}\text{Tl}$ Par M^{lle} TOSIKO YUASA et M^{me} JEANNE LABERRIGUE-FROLOW,

Laboratoire de Physique et Chimie nucléaires, Collège de France

et M. LOUIS FEUVRAIS,

Laboratoire de Synthèse atomique, Ivry.

Sommaire. — Étude à l'aide d'un spectromètre à lentille magnétique épaisse, de la désintégration β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$, avec des sources uniformes et un nouveau type de fenêtre de compteur de $30\text{ }\mu\text{g}/\text{cm}^2$.

Forme du spectre β^- ($E_{\text{max}} = 765 \pm 10\text{ keV}$). Analyse par la méthode de la courbe de Fermi. Application et discussion des corrections dues : *a.* à l'absorption dans le fenêtre du compteur; *b.* à la transition ($\Delta J = 2$, oui); *c.* à la résolution du spectrographe utilisé; *d.* à l'effet d'écran; les corrections *b* et *c* rendent linéaire la courbe de Fermi alors que *d* accentue le décollement.

Recherche d'une raie de conversion interne éventuelle dans la région de 215 à 315 keV . Aucune raie n'a été observée.

Étude de la région du spectre correspondant aux énergies des électrons Auger dûs à la capture électronique

$$\left(\frac{\text{capt. } K}{\beta^-} \sim 3\text{--}4 \text{ pour } 100 \right).$$

Recherche des γ à l'aide d'un spectromètre à scintillations de INa. Aucun γ en dehors des X de 70 keV provenant du réarrangement suivant la capture K n'a été observé. Il semble donc que le décollement de la droite de Fermi observé ne soit pas dû à la complexité du spectre β^- .

Introduction. — Le $^{204}_{81}\text{Tl}$ est un noyau lourd; il est presque doublement magique : son nombre de neutrons, 123, est voisin, en effet, du nombre magique 126 et son nombre de protons, 81, du nombre magique 82. De plus, son spin (d'après le modèle en couches) peut être ≤ 2 et sa parité (—), alors que le niveau fondamental du $^{204}_{82}\text{Pb}$ noyau pair-pair, produit par la désintégration β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$, a un spin 0 et une parité (+). $\log ft$ étant égal à 9,72 pour $T = 4,01$ ans [1] ou 9,65 pour $T = 2,71$ ans [2], la transition β^- pourrait donc être interdite du premier ordre ($\Delta J = 2$, oui).

La forme du spectre β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$ est donc intéressante à connaître : elle pourrait correspondre à la forme unique α .

D'autre part, l'étude de la désintégration par capture K de $^{204}_{83}\text{Bi}$ [3] et de l'état isomérique du $^{204}_{82}\text{Pb}$ (65 mn) [4] a mis en évidence l'existence, dans $^{204}_{82}\text{Pb}$ d'un niveau excité situé à 374 keV au-dessus du niveau fondamental (fig. 1).

Le spin et la parité de ce niveau étant $2+$, une désintégration β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$ allant à ce niveau ($\Delta J = 0$, oui) possible d'après le bilan d'énergie et les règles de sélection, devrait être plus probable que la transition allant au niveau fondamental; le spectre β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$ serait alors complexe.

Les études précédentes [5], [6], [7], [8] de la désintégration β^- ne donnent pas des résultats concordants quant à la forme du spectre β^- .

Saxon et al. [5] utilisent un spectrographe à focalisation à 180° ayant un pouvoir de résolution de 2 pour 100 en Hp, avec des sources de chlorure de thallium purifié chimiquement d'épaisseur 0,4 et 0,1 mg/cm^2 posées sur des supports de 0,5 et 0,1 mg/cm^2 et des fenêtres de compteur cloche de 0,05 et 0,11 mg/cm^2 .

Ils obtiennent

$$E_{\beta\text{max}} = 787 \pm 10\text{ keV}$$

et une courbe de Fermi qui, compte tenu des corrections dues à la résolution du spectrographe et à la transition ($\Delta J = 2$, oui), présente une déviation importante au-dessous de 350 keV . N'observant pas de γ , ils ne concluent pas à la complexité du spectre, mais pensent que la transition est très interdite.

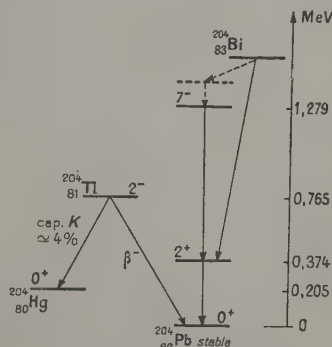


Fig. 1. — Schéma de désintégration du $^{204}_{81}\text{Tl}$.

Lidofsky et al. [6] utilisent un spectrographe à lentille magnétique et des sources, déposées chimiquement et par évaporation sous vide, et obtiennent

$$E_{\beta\text{max}} = 765 \pm 10\text{ keV}$$

et un spectre β^- simple de forme très voisine de la forme α ($\Delta J = 2$, oui); la déviation de la droite de Fermi obtenue avec le facteur exact de correction est alors très faible et commence au-dessous de 150 keV . Ils pensent que cette déviation peut

s'expliquer par l'épaisseur de la source utilisée.

La désintégration du $^{204}_{81}\text{Tl}$ par capture K a été mise en évidence par l'étude du rayonnement X de 70 keV [6], [7], [8], [9] provenant du réarrangement suivant la capture K . Lidofsky et al. [6] par la méthode du compteur proportionnel obtiennent une valeur du rapport

$$\frac{\text{capt. } K}{\beta^-} \simeq 2 \text{ à } 3 \text{ pour } 100.$$

der Mateosian [7], utilisant un cristal de Ina , dans lequel il introduit Tl radioactif, obtient un rapport

$$\frac{\text{cap. } K}{\beta^-} = 1,5 \text{ pour } 100$$

en comparant la raie de 70 keV au spectre β^- observés dans les mêmes conditions. La méthode utilisée, intéressante, car elle permet de comparer les X aux β^- sans avoir recours à l'intensité absolue de la source, demande néanmoins certaine prudence : il faut, en effet, tenir compte de l'échappement des γ , des rayons X , et des électrons du cristal et de la variation de l'efficacité en fonction de la position du Tl dans le cristal.

L'étude du rayonnement γ n'a permis de déceler aucun autre rayonnement que celui de 70 keV.

Meyer-Schützmeister et al. [10], d'autre part, indiquent 10^{-3} comme limite supérieure de probabilité d'émission simultanée de deux particules. Il semble donc peu probable que le spectre β^- soit complexe.

Il nous a paru intéressant, à cause des désaccords apparents de reprendre l'étude de la forme du spectre β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$ en améliorant les conditions expérimentales et en tenant compte de toutes les corrections nécessaires, et d'essayer de déterminer le rapport $\frac{\text{capt. } K}{\beta^-}$ en comparant les intensités des raies Auger dues à la capture K à l'intensité du spectre β^- total observés dans les mêmes conditions géométriques.

Nous avons utilisé, d'une part, un spectromètre à lentille magnétique épaisse [11] pour l'étude de la forme du spectre β^- et des raies Auger du $^{204}_{81}\text{Tl}$ ainsi que pour la recherche des électrons de conversion interne éventuels. Nous avons, d'autre part, étudié le rayonnement γ du $^{204}_{81}\text{Tl}$, à l'aide d'un spectromètre à scintillations [12].

La plupart des résultats de cette étude ont été résumés dans une Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences [13].

Nous décrivons successivement les études faites avec les appareils cités précédemment.

I. — Étude au spectromètre à lentille magnétique épaisse.

Dispositif expérimental. — Nous avons vérifié la linéarité de la valeur de $H\rho$ (gauss.cm) en fonction

du courant dans les bobines du spectromètre utilisé à l'aide des raies A, B, F et I du ThC et de la raie de conversion interne du γ de 661 keV du ^{137}Cs .

Ces mesures nous ont permis de déterminer le pouvoir de résolution de l'appareil pour les conditions géométriques d'utilisation. Il est de 2 pour 100 pour des sources de 4 mm de diamètre déposées sur une feuille de Zaponlak de 20 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$.

Le détecteur est un compteur à bille de verre. La fenêtre, démontable, de formvar, a un diamètre de 20 mm, elle est constituée par une feuille de formvar de 30 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$, résultant de la superposition de trois feuilles de 10 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$. L'épaisseur de ces feuilles est déterminée au moyen de la méthode colorimétrique de Kubota [14] basée sur le principe des lames minces. Cet auteur a établi deux diagrammes permettant de déterminer l'épaisseur de la feuille mince en fonction de la couleur de la lumière réfléchie, la source lumineuse étant soit le soleil soit une lampe électrique. Cette méthode est directe et précise pour des épaisseurs comprises entre 10 et 100 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ avec la lumière solaire et entre 50 et 70 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ avec une lampe.

Nous n'avons pas utilisé de grille, des fils de nylon tissés ayant tendance à couper la feuille mince qu'ils supportent. La feuille de 30 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ est supportée par une feuille de formvar plus épaisse, de 70 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$, percée de trous de 2 mm de diamètre, la surface des trous étant environ 25 pour 100 de la surface totale. Les quatre feuilles constituant ainsi la fenêtre du compteur sont recueillies successivement sur l'eau, leur parfait contact est assuré simplement par séchage à l'air. La fenêtre est ensuite collée sur un cadre métallique avec du Zaponlak puis adaptée au compteur, un joint de néoprène assure l'étanchéité.

L'épaisseur d'une telle fenêtre correspond au parcours d'électrons de 2,5 keV. Le compteur, vidé en même temps que le spectromètre, est rempli d'un mélange de 1,1 cm d'alcool et de 1,5 cm Hg d'argon et maintenu en communication avec une réserve d'un litre environ contenant le mélange du gaz à la même pression. Les feuilles utilisées étaient parfaitement étanches, le palier de 200 V (pente nulle) stable une heure après le remplissage et le taux de comptage constant pour des mélanges gazeux identiques.

Les sources de $^{204}_{81}\text{Tl}$ étaient préparées par sublimation à l'air. TlCl_3 provenant de Oak Ridge et ayant une activité spécifique de 270 $\mu\text{C}/\text{mg}$ est déposé et évaporé sur une feuille de platine qui est ensuite posée sur un canaliseur de pyrex de 10 mm de diamètre et 4 mm de hauteur. Ce canaliseur repose sur une feuille d'aluminium percée d'un trou de 4 mm de diamètre derrière lequel se trouve la feuille de Zaponlak de 10 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$, support de source. En chauffant le platine avec une très petite flamme, TlCl_3 se sublime et l'on recueille sur le support de source environ 10 pour 100 de l'activité déposée

sur le platine, sous forme d'un dépôt de 4 mm de diamètre dont l'homogénéité a été vérifiée par autoradiographie sur film de rayons X de dentistes.

Nous avons ainsi préparé trois sources de l'ordre de 160, 100 et 10 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$. L'estimation de cette épaisseur est faite par comparaison de l'aire du spectre β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$ à l'aire du spectre β^- d'une source de ^{60}Co étalonnée.

Étalonnage. — Les mesures sont effectuées lorsque la pression lue à la jauge Phillips est inférieure à 10^{-4} mm de Hg.

ABSORPTION DES ÉLECTRONS MOUS. — Nous avons déterminé l'absorption des électrons dans la fenêtre du compteur en comparant les courbes de Fermi expérimentales obtenues dans notre dispositif, pour ^{60}Co ($E_{\beta\text{max}} = 310$ keV) et pour ^{57}Co ($E_{\beta\text{max}} = 167$ keV) aux droites de Fermi théoriques correspondantes en admettant que ces transitions soient permises.

On détermine ainsi un facteur de correction dont les valeurs en fonction de l'énergie des électrons sont reproduites dans le tableau I.

TABLEAU I.

E (keV).	H (gauss cm).	$C(^{60}\text{Co})$.	$C(^{57}\text{Co})$.	Moyenne.
7,8.....	300	7,33	—	7,33
10,52.....	350	1,85	1,39	1,62
13,90.....	400	1,45	1,17	1,3
17,42.....	450	1,17	1,03	1,10
21,52.....	500	1,04	1	1,02
23,50.....	550	1,00	1	1

C : facteur de correction.

On voit, qu'au-dessus de 25 keV la perte du taux de comptage des électrons est négligeable pour nos conditions expérimentales.

Étude du spectre β^- de $^{204}_{81}\text{Tl}$. — RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX. — Trois séries de mesures ont été effectuées avec les sources de 160, 100 et 10 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$. Les spectre β^- obtenus avec les sources de 160 et 100 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ ne présentent pas d'excès d'électrons mous par rapport à celui obtenu avec la source de 10 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$.

La forme du spectre β^- observé est reproduite figure 2. L'énergie maximum est $E_{\beta\text{max}} = 765 \pm 10$ keV,

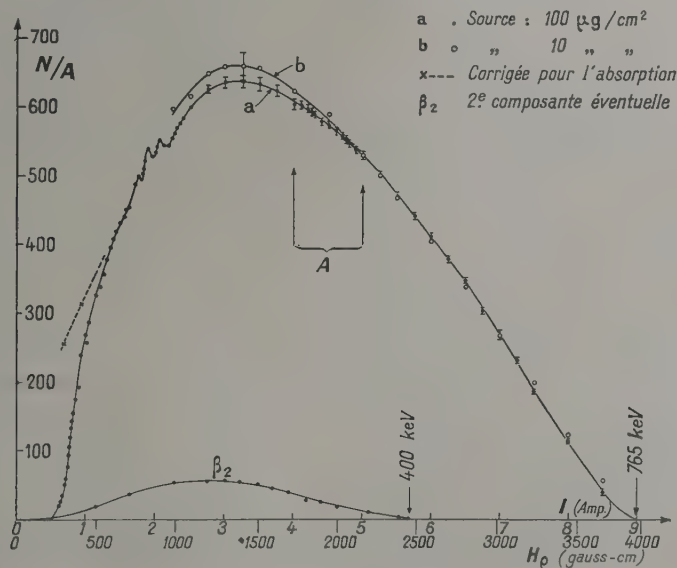


Fig. 2. — Spectre β^- émis par ^{204}Tl .

la courbe pointillée indique la correction due à l'absorption des électrons mous.

Analyse de Fermi du spectre β^- . Corrections. — Nous avons analysé le spectre β^- expérimental du $^{204}_{81}\text{Tl}$ par la méthode des droites de Fermi en tenant compte des corrections dues à :

a. l'absorption dans la fenêtre du compteur;
b. l'ordre d'interdiction de la transition $\Delta J = 2$,
oui;

c. la résolution du spectrographe utilisé;
d. l'effet d'écran.

a. La courbe de Fermi obtenue pour le spectre β^- expérimental corrigé uniquement pour l'absorption dans la fenêtre du compteur est reproduit figure 3 a. Elle présente la forme caractéristique α , vers les énergies maximum du spectre et un décollement de la droite de Fermi au-dessous de 350 keV.

b. La transition β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$ peut être du type

$\Delta J = 2$, oui, c'est-à-dire interdite du premier ordre, le spectre β^- ayant alors la forme unique α qui se déduit de la forme permise à l'aide d'un facteur

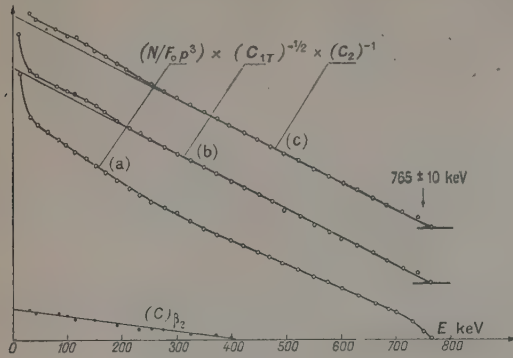


Fig. 3. — Droite de Fermi.

de correction C_{1T} formulé par Konopinski [15], le facteur de correction est proportionnel à

$$\alpha = (p^2 + \frac{F_1}{F_0} q^2), \quad (1)$$

avec :

p , quantité de mouvement de l'électron, en unités $m_0 c$;

q , quantité de mouvement du neutrino, en unités $m_0 c$;
 F_0 et F_1 , fonctions de Fermi tenant compte de l'influence du champ coulombien du noyau dans le cas des transitions permises et interdites du premier ordre.

Lorsque $\alpha Z \ll 1$, $\frac{F_1}{F_0} \simeq 1$, l'approximation

$$\alpha = (p^2 + q^2) \quad (1)$$

est suffisante mais pour $Z \geq 50$, et c'est le cas du $^{204}_{81}\text{Tl}$, cette approximation est insuffisante et il faut tenir compte du rapport $\frac{F_1}{F_0} = A$. Davidson [16] a développé le calcul de $\frac{F_1}{F_0} = A$ en explicitant les valeurs des Γ complexes, intervenant dans ce rapport, par un développement approché.

Nous avons utilisé pour le calcul exact du rapport $\frac{F_1}{F_0}$ les valeurs des Γ complexes tirées des tables numériques de $\Gamma(x + iy)$ de Djelepov et al. [17] dont les calculs sont basés sur le développement de ces fonctions en série de Stirling, ce qui donne une très bonne approximation [18].

La figure 4a représente le facteur A en fonction de l'énergie des β . La figure 4b donne le facteur de correction $(C_{1T})^{\frac{1}{2}}$ pour $Z = 82$ et la figure 4c donne les rapports qui existent entre les C_{1T} précis et

$$r_1 = \frac{(C_{1T} \text{ précis})^{\frac{1}{2}}}{(C_{1T} \text{ approché})^{\frac{1}{2}}},$$

où

$$C_{1T} \text{ précis} = \left[\frac{1 + S_0}{24} \right] [(W_0 - W)^2 + A(W^2 - 1)],$$

$$C_{1T} \text{ approché} = \left[\frac{(W_0 - W)^2 + (W^2 - 1)}{12} \right],$$

et

$$r_2 = \frac{(C_{1T} \text{ précis})^{\frac{1}{2}}}{(C_{1T} \text{ Davidson})^{\frac{1}{2}}}.$$

On voit que l'approximation (1) : $\alpha = p^2 + q^2$

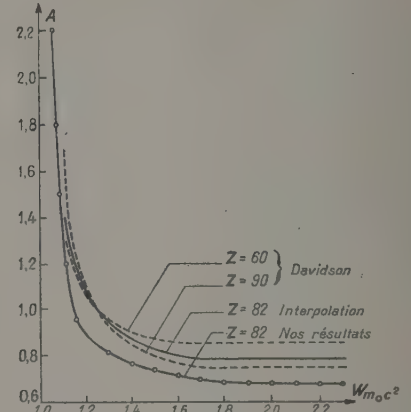


Fig. 4a. — Coefficient A de

$$C_{1T} = \left[\frac{1 + S_0}{24} \right] [(W_0 - W)^2 + A(W^2 - 1)].$$

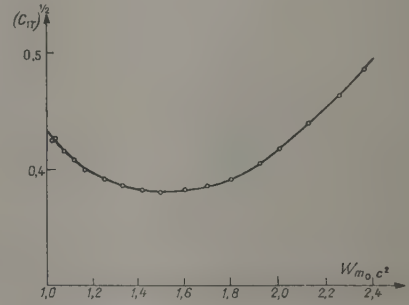


Fig. 4b. — Facteur de correction $(C_{1T} \text{ précis.})^{\frac{1}{2}}$

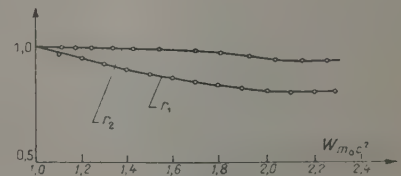


Fig. 4c.

$$r_1 = \left[\frac{C_{1T} \text{ précis}}{C_{1T} \text{ approché}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = \left[\frac{C_{1T} \text{ précis}}{C_{1T} \text{ Davidson}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

est très nettement insuffisante pour le cas du $^{204}_{81}\text{Tl}$, mais que par contre la formule approchée de Davidson est assez précise.

La courbe de Fermi, corrigée à l'aide du facteur de correction C_{17} que nous avons calculé est linéaire jusqu'à 170 keV, le décollement au-dessous de cette énergie étant peu accentué (fig. 3b).

c. Les mesures effectuées à l'aide d'un spectrographe β ne reproduisent pas la forme exacte d'un spectre β . Elles sont entachées d'une erreur (petite) provenant de la résolution limitée par la géométrie et par l'absorption et la diffusion des électrons. Pour rétablir la vraie forme du spectre étudié, il convient de tenir compte de la correction due à cette résolution. Owen et Primakoff [19] ont formulé cette correction en détail dans le cas d'un spectrographe à focalisation à 180° et ont proposé une expression approchée, pour le facteur de correction.

Nous avons formulé ce facteur dans le cas d'un spectrographe à lentille magnétique [20]. Nous avons établi que cette correction est insignifiante dans nos conditions géométriques ($< 0,1$ pour 100), sauf au voisinage de la limite supérieure ($\sim 0,3$ pour 100).

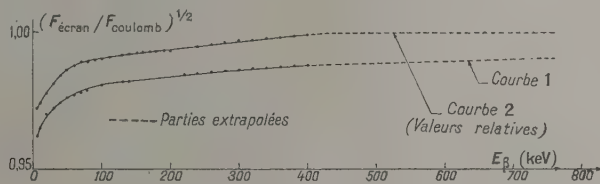


Fig. 5. — Facteur de correction pour l'effet d'écran pour $^{204}_{81}\text{Tl}$.

valeurs numériques de Reitz pour $Z = 49$ et 84 sont reportées sur la figure 5, courbe 1.

On voit qu'au-dessus de 400 keV ce facteur varie peu. Le spectre β^- n'est donc affecté d'une façon importante qu'au-dessous de cette valeur d'énergie.

Nous avons appliqué à la droite de Fermi corrigée pour C_{17} (fig. 3b) le facteur de correction reproduit sur la figure 5, courbe 2 calculé en égalant à 1 la valeur du facteur de correction exact pour l'énergie de 765 keV.

La courbe de Fermi obtenue dans ce cas présente un décollement par rapport à la droite, au-dessous de 400 keV (fig. 3 c) (1).

Discussion de l'analyse de Fermi du spectre β^- .

— Cette analyse permet d'émettre les hypothèses suivantes :

1° La courbe de Fermi brute présente à la limite

(1) Nous rétablissons ici une erreur qui s'était introduite dans la courbe publiée dans la Note aux C. R. Acad. Sc., 1954, 238, 1500 (fig. 3 c). Les ordonnées de cette courbe doivent être divisées entre 20 et 400 keV par les facteurs suivants :

E (keV)...	20,	50,	100,	200,	300,	400,
Facteur.....	1,26	1,16	1,10	1,07	1,03	1,01

d. Effet d'écran. — Les électrons périphériques de l'atome d'un noyau de charge Z ont pour effet de diminuer l'intensité du champ coulombien du noyau. Celui-ci correspond au champ coulombien d'une charge Z' que l'on appelle le Z effectif de l'atome, la différence entre Z et Z' croissant avec Z . Cet « effet d'écran » influe sur les β émis par le noyau lors de la désintégration β et sur la forme du spectre β : les rayons β^- sont moins ralentis par le champ coulombien dû à la charge Z' effective que par celui dû à la charge Z réelle du noyau, alors que les rayons β^+ sont moins accélérés.

Rose [21], Longmire et al. [22] et récemment Reitz [23] ont étudié et calculé cet effet. Il est assez important pour les spectres β^+ , mais il l'est beaucoup moins pour les spectres β^- . Dans le cas du ^{60}Co , par exemple, la correction à apporter est négligeable. Dans le cas du $^{204}_{81}\text{Tl}$, par contre, qui est un élément lourd, elle n'est plus négligeable. Les valeurs du facteur de correction à appliquer à la droite de

Fermi $\left(\frac{F'_{\text{écran}}}{F_{\text{coulomb}}} \right)^{\frac{1}{2}}$, obtenu par interpolation des

supérieure d'énergie une forme de type α , la transition β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$ n'est donc pas une transition permise;

2° Si l'on tient compte uniquement de la correction due à la transition $\Delta J = 2$, oui, la courbe de Fermi est linéaire pratiquement de la limite supérieure jusqu'à 170 keV; le spectre β^- serait donc interdit du premier ordre ($\Delta J = 2$, oui) et simple;

3° Si, de plus, l'on tient compte de l'effet d'écran, la courbe de Fermi présente un décollement plus accentué. Le spectre β peut être décomposé alors en deux composantes d'énergie maximum

$$E_{\beta 1 \text{ max}} = 765 \pm 10 \text{ keV} \quad \text{et} \quad E_{\beta 2 \text{ max}} \cong 400 \text{ keV}$$

et d'intensité relatives telles que

$$\frac{I_{\beta 2}}{I_{\beta 1}} \lesssim 5 \text{ pour } 100.$$

Étude des raies Auger dues à la capture élec-

tronique. — La capture K du $^{204}_{81}\text{Tl}$ conduit à la formation d'atomes de $^{204}_{80}\text{Hg}$ ionisés dans la couche K . Cette ionisation est suivie du réarrangement du cortège, avec émission de rayonnement X de la série K , principalement du rayonnement K_{α} d'énergie

$$\sim E_K - E_L \cong 83,193 \text{ keV} - 14,852 \text{ keV} = 68,34 \text{ keV}.$$

Ce rayonnement X peut soit sortir de l'atome, dans une proportion indiquée par le rendement de fluorescence $K(f_K) = 0,925$, d'après la théorie relativiste [24] ou 0,946, d'après les mesures expérimentales [25] soit céder son énergie à un électron périphérique (électron Auger) de la couche L ou d'une couche plus extérieure.

Les électrons Auger dus à la capture K du $^{204}_{81}\text{Tl}$ ont des énergies comprises entre :

$$E_K - E_{L_1} - E_{L_2} = 53,5 \text{ keV} \quad \text{et} \quad E_K - E_M - E_M = 77,5 \text{ keV}.$$

La capture L du $^{204}_{81}\text{Tl}$ conduit à la formation d'atomes de $^{204}_{80}\text{Hg}$, ionisés dans la couche L .

Les électrons Auger dus à la capture L ont des énergies de l'ordre de $E_L - E_M - E_M$, c'est-à-dire comprises entre 6,5 et 9 keV.

Mais il est bien évident que les électrons Auger de cette énergie peuvent également provenir des captures K qui sont suivies de l'émission de photons $E_K - E_L$.

Résultats expérimentaux. — Nous avons étudié, avec une attention particulière, les régions du spectre β^- du $^{204}_{81}\text{Tl}$, correspondant aux domaines d'énergie des raies Auger dues à la capture électronique (H_0 de 700 à 1000 gauss.cm et H_0 de 250 à 300 gauss.cm).

Nos mesures, reprises trois fois et avec deux sources différentes, ont mis en évidence l'existence de trois bosses de faible intensité, reproductibles et centrées à des énergies de 46,4, 56,6 et 64,3 keV, pour le domaine d'énergie des électrons Auger K (fig. 6).

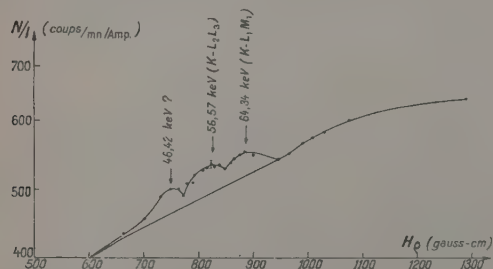


Fig. 6. — Raies Auger dues à la capture K .

Il est possible d'identifier les bosses de 56,6 et de 64,3 keV aux raies $K - L_2 L_3$ et $K - L_1 M_1$. Par contre, la bosse de 46,4 keV a une énergie nettement inférieure à $K - L_1 L_1$; elle a peut-être une origine différente.

Dans le domaine d'énergie des électrons Auger L , nous avons observé deux bosses, très peu intenses, d'énergies environ 6,65 et 6,95 keV (fig. 7).

Ces bosses peuvent correspondre aux raies :

$$L_{III} - M_{III} M_{IV} \quad \text{ou} \quad L_{III} - M_V M_{IV} \quad \text{pour } 6,65 \text{ keV}$$

et

$$L_{III} - 2 M_{III} \quad \text{pour } 6,95 \text{ keV}.$$

Afin de déterminer les rapports $\frac{\text{capt. électronique}}{\text{émis. } \beta^-}$, nous avons comparé l'intensité des bosses observées

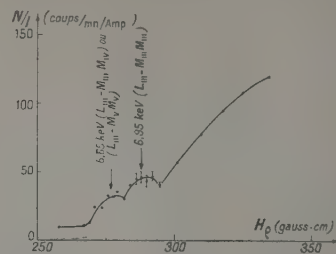


Fig. 7. — Raies Auger dues aux captures K et L .

à celle du spectre β^- en planimétrant leurs surfaces. Le résultat est reporté dans le tableau II.

TABLEAU II.

$\frac{S_K}{S_{\beta^-}}$		
$\frac{S_{K_1} + S_{K_2} + S_{K_3}}{S_{\beta^-}}$	$\frac{S_{K_1} + S_{K_2}}{S_{\beta^-}}$	$\frac{S_L}{S_{\beta^-}}$
$0,003 \pm 0,001$	$0,002 \pm 0,0007$	$\sim 2 \cdot 10^{-4}$

Discussion des résultats. — CAPTURE K . — Nous avons déterminé, d'après les valeurs du tableau II le rapport $\frac{\text{capt. } K}{\beta^-}$ en prenant, pour le rendement de fluorescence soit la valeur de 0,925 donnée par la théorie relativiste, soit la valeur 0,946 obtenue expérimentalement.

Nous donnons, dans le tableau III les valeurs obtenues en tenant compte ou non de la bosse centrée vers 47 keV.

TABLEAU III.

$\frac{S_K}{S_{\beta^-}}$		$\frac{\text{capt. } K}{\beta^-} \text{ (pour 100)}$	
$\frac{S_{K_{\text{tot}}}}{S_{\beta^-}}$	$\frac{S_{K_1} + S_{K_2}}{S_{\beta^-}}$	$f_K = 0,925$	$f_K = 0,946$
$0,3 \pm 0,1$ pour 100		(4 ± 1)	(6 ± 2)
$0,2 \pm 0,07$ »		(3 ± 1)	$(4 \pm 1,5)$

ÉLECTRONS AUGER L . — Les bosses, situées vers 7 keV qui sont dues aux électrons Auger L sont dans un domaine d'énergie où l'absorption dans la fenêtre du compteur est très importante et difficile à évaluer quantitativement. L'absorption dans la source elle-même joue également; c'est pourquoi les indications que l'on peut tirer de la comparaison des intensités des raies dues aux électrons Auger L à celles dues aux électrons Auger K sont purement qualitatives.

En première approximation, le rapport des sur-

faces des bosses $\frac{S_L}{S_K}$ est relié au rapport $\frac{\text{capt. } L}{\text{capt. } K}$, par la relation suivante :

$$\frac{S_L}{S_K} \simeq 9,3 \times \frac{\text{capt. } L}{\text{capt. } K} + 8.$$

La valeur que nous obtenons pour $\frac{S_L}{S_K}$, compte tenu de la correction due à l'absorption dans la fenêtre du compteur : $\frac{S_L}{S_K} = 3,8$ est beaucoup trop petite : elle est sans doute due à une mauvaise estimation de l'absorption.

RECHERCHE DES ÉLECTRONS DE CONVERSION INTERNE. — Nous avons vu que l'analyse du spectre β^- de $^{204}_{81}\text{Tl}$ par la méthode des droites de Fermi pouvait, si l'on admet que la transition est ($\Delta J = 2$, oui) et que la correction pour l'effet d'écran est correcte, suggérer l'existence d'une composante du spectre β^- d'intensité ~ 5 pour 100 conduisant à un niveau excité du $^{204}_{81}\text{Pb}$ situé à 365 keV environ du niveau fondamental.

Or aucun γ de cette énergie n'est signalé dans la désintégration du $^{204}_{81}\text{Tl}$ (limite supérieure donnée $< 10^{-4}$ γ par β) [8].

Au cas où ce niveau excité aurait un spin 0 et une parité +, le passage au niveau fondamental (0+) ne pourrait se faire que par émission d'électrons de conversion interne. Nous avons donc examiné avec soin la région du spectre β^- comprise entre 215 et 315 keV (fig. 2, région A), afin de voir s'il n'existe pas d'électrons d'énergie

$$\sim 365 \text{ keV} - (E_{K\text{Pb}}) \simeq 277 \text{ keV}.$$

Nous n'en avons pas décelé.

II. — Étude au spectromètre à scintillations.

Dispositif expérimental. — Nous avons effectué la recherche du rayonnement γ d'énergie de l'ordre de 365 à 375 keV qui pourrait être émis lors de la désintégration du $^{204}_{81}\text{Tl}$ ainsi que l'identification du noyau émetteur des rayons X d'énergie voisine de 70 keV à l'aide d'un spectromètre à scintillations de INA construit par M. Langevin et al. [12], essentiellement composé d'un cristal de Harshaw, de 2,8 cm de hauteur et de 2,5 cm de diamètre, d'un photomultiplicateur EMI 6260 suivi d'un amplificateur linéaire, sans effet notable de saturation et d'un analyseur à canal unique.

La bande du sélecteur utilisée était $\Delta V = 2 \text{ V}$.

Résultats expérimentaux. — **ÉTUDE DU RAYONNEMENT γ .** — La recherche des rayons γ de 365 à 375 keV a été effectuée avec une source de 1 mC (0,060 g) de TlNO_3 enfermée dans un flacon de verre et placée devant le compteur à scintillations à une distance d'environ 5 cm. Entre la

source et le cristal, est interposée une feuille d'Al de 1 mm + ~ 3 mm de verre. L'amplification d'impulsion est 900.

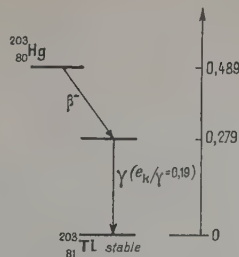


Fig. 8. — Schéma de désintégration de $^{204}_{81}\text{Hg}$.

Comme étalon, on a utilisé la raie γ de 279 keV de ^{203}Hg (fig. 8).

L'analyse du spectre obtenu permet de constater que l'intensité des γ de 365 à 375 keV est $< 10^{-4}$ γ par β . On n'observe, en effet, aucune raie au-dessus du fond dû au Bremsstrahlung externe et interne.

RAYONNEMENT X DE 69 keV. — Pour identifier le noyau-émetteur des rayons X d'environ 70 keV, nous avons effectué l'expérience suivante : nous avons préparé des sources de ^{204}Tl et de ^{203}Hg à peu près de mêmes dimensions et de même épaisseur. Elles sont placées dans la même position par rapport au compteur à scintillations ; on examine la position de la raie des rayons X émis par ^{204}Tl par rapport à celle émise par ^{203}Hg (fig. 9).

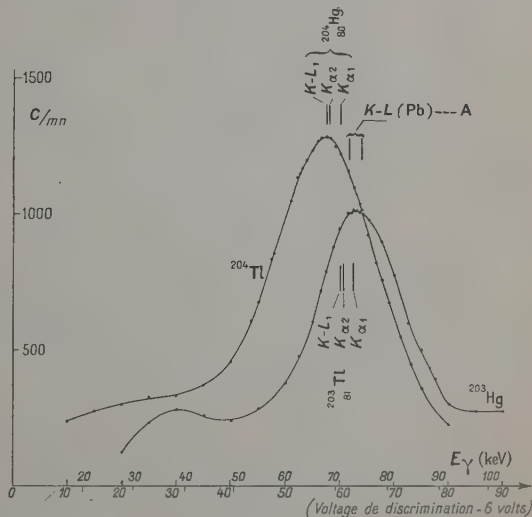


Fig. 9. — Raie de 69 keV émise par $^{204}_{81}\text{Tl}$ et raie de conversion interne des γ émis par $^{203}_{81}\text{Tl}_{203}$ à la suite de la désintégration β^- de $^{203}_{81}\text{Hg}$.

La raie des rayons X émise par la source de ^{203}Hg est celle du réarrangement ($K - L$) consécutif à l'éjection d'un électron de conversion interne

due au rayonnement γ de 279 keV $\left(\frac{\sigma_K}{\gamma} \sim 0,19\right)$ dans le noyau final, $^{203}_{81}\text{Tl}$ (fig. 8).

Les raies observées permettent de constater que la raie X émise dans la désintégration du $^{204}_{81}\text{Tl}$ se trouve placée à l'endroit de la raie $(K-L)$ (69 keV) du $^{204}_{81}\text{Hg}$ et non pas à celui des raies K_α du $^{204}_{81}\text{Pb}$ (73 à 75 keV) ni du $^{204}_{81}\text{Tl}$ (71 à 73 keV). Ceci prouve l'existence de la capture K.

Par ailleurs, la bosse de 46 keV environ, observée dans la région des électrons Auger K aurait pu s'expliquer par la présence dans la désintégration du $^{204}_{81}\text{Tl}$ d'un γ converti soit dans la couche K (il aurait alors une énergie $\sim 47 + 83 \text{ keV} = \sim 130 \text{ keV}$), soit dans la couche L (il aurait alors une énergie $\sim 47 + 12 \text{ keV} \cong 60 \text{ keV}$).

L'analyse du spectre γ ne permet de déceler aucun γ de 130 keV et la forme de la raie de 69 keV ne permet pas de supposer la présence d'un rayonnement γ de 60 keV d'intensité suffisante pour expliquer de cette façon l'origine de la bosse d'électrons de $\sim 47 \text{ keV}$.

III. — Discussion générale des résultats et conclusion.

Spectre β^- . — D'après nos résultats expérimentaux, le spectre β^- de $^{204}_{81}\text{Tl}$ pourrait correspondre à une transition ($\Delta J = 2$, oui), d'accord avec les conclusions de [7]; der Mateosian signale un décollement de la droite de Fermi corrigée pour ($\Delta J = 2$, oui) au-dessous de 150 keV, bien que sa source soit introduite dans le cristal de INa, donc pratiquement sans épaisseur. Nous avons nous-même constaté le même décollement pour les deux épaisseurs différentes des sources. Le décollement de la droite de Fermi signalé ne serait donc dû à l'épaisseur des sources que dans la mesure où celle-ci intervient dans le pouvoir de résolution.

Nous avons constaté que la correction due à l'effet d'écran calculée d'après les valeurs de Reitz [23] accentue légèrement le décollement de la droite de Fermi.

L'absence d'émission de raie γ , d'électrons de conversion interne, ou de raies X de réarrangement du noyau de $^{204}_{81}\text{Pb}$ produit par la désintégration β^- , permet de penser que la complexité du spectre est peu probable et qu'il s'agit bien d'un spectre simple d'une transition ($\Delta J = 2$, oui). Le décollement de la droite de Fermi peut s'expliquer soit par la forme naturelle du spectre β^- , soit par une surestimation de l'effet d'écran.

Le modèle en couches [26] donne les indications suivantes :

L'état fondamental du $^{204}_{81}\text{Pb}$, noyau pair-pair est un état 0+.

En ce qui concerne l'état fondamental du $^{204}_{81}\text{Tl}$, noyau impair-impair, on peut avoir :

— pour les protons au nombre de 81 un état $3 \frac{1}{2}^-$;

— pour les neutrons, au nombre de 123 un état $4 \frac{1}{2}^-$ (*).

Il semble que nos résultats expérimentaux sur la forme du spectre β^- permettent de confirmer cette configuration. Elle donne en effet pour l'état fondamental du $^{204}_{81}\text{Tl}$, le spin = 2 et la parité (—), indiquant ainsi pour la transition β^- allant au niveau fondamental du $^{204}_{81}\text{Pb}$ la valeur ($\Delta J = 2$, oui).

Le premier niveau excité, de $^{204}_{81}\text{Pb}$ mis en évidence par l'étude de la capture K du $^{204}_{81}\text{Bi}$ et de l'isomère du $^{204}_{81}\text{Pb}$ (65 mn) n'est pas un état rotationnel, d'accord avec les hypothèses de A. Bohr, il a un spin = 2 et la parité +.

Une transition β^- allant du niveau fondamental du $^{204}_{81}\text{Tl}$ (2 —) à ce niveau (2 +) (fig. 1), serait une transition ($\Delta J = 0$, oui) interdite du premier ordre et devrait être plus probable que la transition ($\Delta J = 2$, oui) conduisant au niveau fondamental du $^{204}_{81}\text{Pb}$, interdite du premier ordre également.

Le fait que l'on n'observe pas cette transition peut trouver une explication dans l'hypothèse des mélanges de configuration développée par de Shalit et Goldhaber [27].

Nous avons pu identifier la raie de rayons X de 69 keV à celle de rayons X dus à la capture K de Tl en utilisant une comparaison des raies de rayons X émis par ^{203}Hg et nous avons pu également mesurer le rapport $\frac{K}{\beta^-}$, à l'aide des raies d'électrons

Auger dus à la capture K : 4 ± 1 pour 100 si l'on emploie la valeur théorique relativiste pour le coefficient de fluorescence : 0,925. Cette valeur est un peu supérieure à celle de Lidofsky et Wu : 2 à 3 pour 100 mesurée à l'aide des rayons X pour l'intensité de la capture — K. Ce désaccord proviendrait, soit de l'imprécision du coefficient de fluorescence utilisée, soit de la divergence des procédés de mesure. Si nous admettons que la valeur obtenue par Lidofsky et Wu pour le rapport $\frac{\text{capt. K}}{\beta^-}$

est exacte, nous en déduisons, avec notre rapport $\frac{S_K}{S_{\beta^-}}$,

un coefficient de fluorescence, $f_K = 0,85$ à $0,90$. Or Broyles et al. [25] ont obtenu expérimentalement $f_K = 0,946$ pour ^{204}Hg .

Cette divergence nous semble être trop grande. D'autre part, la valeur 1,5 pour 100 de ce rapport, obtenue par der Mateosian, est très inférieure à la nôtre.

der Mateosian a mesuré expérimentalement l'énergie maximale du rayonnement de freinage dû à capture K, $w_0 + w_K$ de $^{204}_{81}\text{Tl}$, et a obtenu 252 keV. Il l'a comparée avec l'estimation théorique donnée

(*) Bien que dans la référence [27], on propose $(\frac{d}{2}, p_{\frac{1}{2}})$ pour configuration du $^{204}_{81}\text{Tl}$.

par les formules de Marshak [28] :

$$A \begin{cases} \frac{1}{\tau_{\beta}} = \frac{1}{\tau_0} \frac{|M_{\beta}|^2}{[1.3]^2} R^2 B_1(Z, W_0), \\ \frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_0} \frac{|M_K|^2}{[1.3]^2} R'^2 B'_c(Z, W_0) \end{cases}$$

dans lesquelles :

$\frac{\tau_0}{1} =$ constante de désintégration;

R = rayon du noyau final dans la désintégration β^- ;

R' = rayon du noyau final dans la capture K ;

B_1 = partie intégrale de la probabilité totale de désintégration β^- ;

$$B'_c(Z, W_0) = \frac{1}{2} \pi (W_0 + W_K)^4 n_K g_K^2,$$

avec W_K , énergie de liaison de la couche K ; ($W_0 + W_K$) énergie libérée par capture K , Avec $R \simeq R'$ et $n_K = 1$ (et non pas $n_K = 2$), on arrive à :

$$\frac{|M_{\beta}|^2}{|M_K|^2} \frac{B_1(Z, W_0)}{B_c(Z, W_0 + W_K)} = \frac{\text{pour } 100 \beta^-}{\text{pour } 100 K}.$$

Avec nos résultats, c'est-à-dire

$$\frac{\text{pour } 100 \beta^-}{\text{pour } 100 K} = 24$$

et

$$(W_0 + W_K) = 252 \text{ keV}$$

(obtenu expérimentalement par der Mateosian) ⁽³⁾, nous arrivons à

$$\frac{|M_{\beta}|^2}{|M_K|^2} \cong 0,17.$$

⁽³⁾ Cette étude est reprise par T. Yussa et M. Langevin et l'expérience est en cours.

Ce rapport, différent de r , pourrait peut-être s'expliquer par le fait que les configurations de l'état fondamental de $^{204}_{80}\text{Hg} \left(4d \frac{2}{3}\right)^4 \left(4p\right)$ et de celui du $^{204}_{81}\text{Pb} \left(3s \frac{1}{2}\right)^2 \left(4p \frac{1}{2}\right)^2$ ne sont pas identiques.

En ce qui concerne la capture L , nous n'avons pu avoir qu'un résultat qualitatif, l'intensité des phénomènes L observés étant très faible; ils se trouvent en effet dans un domaine d'énergie où l'absorption dans la fenêtre du compteur est très importante et très difficile à évaluer avec précision.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à M. le Professeur F. Joliot pour l'intérêt qu'il a pris à ce travail et pour l'aide que ses discussions nous ont apportée.

Nous remercions M. R. Nataf qui nous a donné des conseils pour l'interprétation théorique des résultats; M. P. Hubert, qui nous a conseillé sur l'utilisation du spectromètre β^- , et M. Langevin qui a eu l'amabilité de nous laisser la disposition du spectromètre à scintillations qu'il a construit.

Nous remercions également l'équipe du synchrotron Philipps d'Amsterdam et tout particulièrement M. Van Aten Jr. qui a eu l'obligeance de s'intéresser à la préparation de $^{204}_{81}\text{Tl}$ d'activité spécifique très élevée par réaction (d, α) sur ^{206}Pb ; les essais d'une telle préparation sont en cours.

Une prochaine lettre à la rédaction discutera les publications récentes sur $^{204}_{81}\text{Tl}$.

Manuscrit reçu le 18 juin 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] HARBOTTLE G. — *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1234.
- [2] LOCKETTI E. E. et THOMAS R. H. — *Nucleonics*, 1953, **11**, n° 3, 14.
- [3] GOLDBERGER A. et HILL R. D. — *Rev. Mod. Physics*, 1952, **24**, 179.
- [4] FRAUENFELDER H., LAWSON JR. J. S. et JENTSCHKE W. — *Phys. Rev.*, 1954, **93**, 1126.
- [5] SAXON D. et RICHARDS J. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 982.
- [6] LIDOFKY L., MACKLIN P. et WU C. S. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 204 et 391.
- [7] DER MATEOSIAN E. — *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 1187.
- [8] HAVENS W. W. — Columbia Univ. Progress Report, 30 juin 1951.
- [9] MITCHELL A. C. G. et CAIRD R. C. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 388.
- [10] MEYER-SCHÜTZMEISTER L. et VINCENT D. H. — *Z. Physik*, 1952, **134**, 9.
- [11] HUBERT P. — Thèse. *Ann. Phys.*, 1953, **8**, 662.
- [12] LANGEVIN M., ALLARD G. et CORBE G. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 691.
- [13] YUASA T., LABERRIGUE-FROLOW J. et FEUVRAIS L. — *C. R. Acad. Sci.*, 1954, **238**, 1500.
- [14] KUBOTA H. — Report of the Institute of Industrial Science. *Univ. Tokyo*, 1952, **2**, 205.
- [15] KONOPINSKI E. J. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 308.
- [16] DAVIDSON J. P. — *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 48.
- [17] DJELEPOV B. S. — Tables de désintégration β . Léninegrad, 1952.
- [18] YUASA T. et LABERRIGUE-FROLOW J. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 95.
- [19] OWEN G. E. D. et PRIMAKOFF H. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1406; *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 447.
- [20] YUASA T. et FEUVRAIS L. — *C. R. Acad. Sci.*, 1954, **239**, 23.
- [21] ROSE M. E. — *Phys. Rev.*, 1936, **49**, 727.
- [22] LONGMIRE C. et BROWN H. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 264 et 1102.
- [23] REITZ J. R. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 10.
- [24] BURHOP E. H. S. — The Auger effect. Cambridge University Press, 1952.
- [25] BROYLES C. D., THOMAS D. A. et HAYNES S. K. — *Phys. Rev.*, 1953, **88**, 715.
- [26] KLINKENBERG P. F. A. — *Rev. Mod. Physics*, 1952, **24**, 63.
- [27] DE SHALIT A. et GOLDBERGER M. — *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 1211.
- [28] MARSHAK R. E. — *Phys. Rev.*, 1942, **61**, 431.

MESURES PRÉCISES DE PÉRIODES RADIOACTIVES.

Par JACQUES TOBAILEM,

Institut du Radium, Laboratoire Curie.

Sommaire. — On a mesuré avec précision la période radioactive de quelques radioéléments en utilisant un dispositif différentiel de deux chambres d'ionisation reliées à une lampe électromètre. On a atteint une précision de l'ordre de 1 pour 100 pour des périodes de quelques années et de quelques pour 1000 pour des périodes de quelques jours. Les résultats obtenus sont les suivants :

^{60}Co : $5,27 \pm 0,07$ ans; ^{222}Rn : $3,825 \pm 0,005$ jours; ^{227}Ac : $21,6 \pm 0,4$ ans; ^{67}Ga : $77,9 \pm 0,3$ h;
 ^{24}Na : $14,90 \pm 0,05$ h; ^{64}Cu : $12,80 \pm 0,03$ h; ^{198}Au : $2,686 \pm 0,005$ jours.

Introduction. — Très peu de travaux ont été actuellement effectués en ce qui concerne les déterminations précises de périodes de décroissance radioactives. Parmi ceux-ci on peut cependant indiquer les travaux de J. H. Sreb [1] en 1951 sur ^{131}I avec une précision de 10^{-3} environ ($8,1409 \pm 0,0062$ jours), de J. W. Cobble et R. W. Attebery [2] en 1950 sur le ^{38}Cl à 10^{-3} ($37,29 \pm 0,04$ mn), le ^{82}Br à $1,5 \cdot 10^{-3}$ ($35,87 \pm 0,05$ h) (ces deux derniers auteurs ont utilisé une chambre d'ionisation 4π remplie d'argon sous 40 atm et reliée à un électromètre dynamique). Citons encore parmi les publications récentes celles de L. M. Silver [3] en 1951 : il a déterminé à $5 \cdot 10^{-3}$ la période de plusieurs radioéléments, entre autres le ^{64}Cu ($12,88 \pm 0,03$ h), le ^{65}Ni ($2,564 \pm 0,005$ h), le ^{198}Au ($2,69 \pm 0,01$ jours) à l'aide d'un dispositif à chambre d'ionisation et électromètre dynamique.

Mais la mesure la plus précise connue reste encore celle effectuée par I. Curie et C. Chamié [4] en 1924 sur le ^{222}Rn avec une précision de $5 \cdot 10^{-4}$ ($3,823 \pm 0,002$ jours) avec un dispositif de deux chambres d'ionisation différentielle.

La principale technique utilisable pour obtenir de telles précisions est celle de la chambre d'ionisation reliée à un système électrométrique stable et sensible (électromètre mécanique, lampe électro-ou électromètre dynamique). On opère en général par méthode de zéro (compensation par la méthode de Townsend ou du quartz piézoélectrique) ou par vitesse de déviation.

La méthode des deux chambres d'ionisation différentielle, que nous avons adoptée, a été introduite en radioactivité en 1911 par E. Rutherford [5]. En 1924, Marie Curie [6] l'utilise pour tenter de mettre en évidence une différence de période entre une ampoule de radon ordinaire et une ampoule de radon concentré sous très petit volume où les chocs sont nombreux. Le même dispositif différentiel a également servi à I. Curie et C. Chamié [4] pour leur mesure de la constante radioactive du radon par une méthode de sources additionnelles

et pour une comparaison d'ampoules de radon d'âges différents. En 1933, A. Piccard et L. Meylan [7] appliquent cette méthode à la mesure de sources de radium. En 1949, R. Bouchez, P. et R. Daudel, R. Muxart et A. Rogozinski [8] et E. Segré et C. E. Wiegand [9] ont repris la méthode différentielle pour mettre en évidence une variation de période du ^7Be en fonction du degré d'ionisation de l'atome.

J'ai abordé le problème de la mesure précise des périodes radioactives à l'aide de cette technique d'ionisation différentielle en utilisant une lampe électromètre. La méthode que j'ai mise au point permet d'obtenir des résultats rapides et précis. J'ai pu ainsi déterminer avec une assez grande précision des périodes de décroissance comprises entre quelques heures et quelques dizaines d'années. Pour les périodes allant jusqu'à quelques mois, il est possible d'obtenir assez aisément des précisions de quelques pour-mille et pour celles de quelques années on obtient 1 pour 100, les temps de mesure étant courts par rapport à la période à mesurer.

Le dispositif expérimental. — Il est constitué principalement par un ensemble de deux chambres d'ionisation identiques, dont les électrodes collectrices sont reliées entre elles et à la grille d'une lampe électromètre triode subminiature Victoreen VX 32 B. Les deux chambres sont portées à des tensions opposées de $+400$ et -400 V, assurant une bonne saturation. Les courants d'ionisation produits dans chacune des chambres sont de signes contraires et l'on mesure la différence de ces courants. Les courants de mouvement propre dans chaque chambre ont des valeurs voisines et très réduites, environ $2 \cdot 10^{-6}$ u. e. s., ce qui correspond à la formation de 30 paires d'ions par centimètre cube et par seconde. Le courant de mouvement propre total est égal à la somme du courant grille i_g et de la différence des courants de mouvement propre dans les deux chambres : $i_1 - i_2$; i_g est de l'ordre de 10^{-15} A ($3 \cdot 10^{-6}$ u. e. s.) et l'on peut choisir

les polarités des tensions sur les chambres de façon que i_s et $i_1 - i_2$ aient des signes opposés. On obtient ainsi pour $i_0 = i_s - (i_1 - i_2)$ une valeur inférieure à 10^{-15} A ($3 \cdot 10^{-6}$ u. e. s.). Pendant toute la durée de nos expériences, i_0 est resté sensiblement constant. De grandes précautions ont été prises pour maintenir le laboratoire inactif et ne pas contaminer accidentellement les chambres d'ionisation. Chaque mesure de périodes a été encadrée par des mesures de i_0 . Les deux chambres sont séparées par un écran de plomb de 6 cm d'épaisseur de façon que les rayonnements qui agissent sur une des chambres ne produisent pratiquement pas d'ionisation dans l'autre.

Les ensembles porte-sources sont très soignés, de manière que la position des sources par rapport aux chambres d'ionisation soit parfaitement bien définie, ce qui donne la possibilité de déplacer les sources radioactives avec la certitude de revenir

Nous avons obtenu une très bonne stabilité de notre montage, qui est resté en fonctionnement presque ininterrompu pendant plusieurs années. La dérive du spot lumineux est inférieure à 0,1 mV/jour. En plus de cette dérive, le zéro est soumis à des fluctuations dues principalement au bruit de fond de la lampe, fluctuations qui peuvent atteindre également 0,1 mV. Cette grande stabilité nous a permis d'utiliser une assez grande sensibilité pour le galvanomètre. La sensibilité en tension du système électrométrique qui était de 5 000 mm/V pour nos premières mesures a pu ainsi être portée à 10 000, puis à 14 000 mm/V.

Principe des expériences. — On réalise initialement l'équilibre de façon que le courant d'ionisation produit par une source dans une des deux chambres soit compensé par celui produit par l'autre source dans la deuxième chambre; une faible variation de l'activité d'une des sources par rapport à l'autre se traduira par un déséquilibre du dispositif. Si une des intensités est supposée constante par rapport à celle produite par le radioélément dont on veut mesurer la période de décroissance, la mesure du déséquilibre permettra de déterminer la période inconnue.

L'équilibre est réalisé en modifiant la distance de l'une ou l'autre des sources par rapport à la chambre d'ionisation correspondante, le réglage fin étant obtenu en couvrant la source d'écrans de nature et d'épaisseur convenables.

On a utilisé comme référence des sources de radium dont la période est en général grande par rapport aux périodes à mesurer. Un écran de plomb de quelques millimètres d'épaisseur a toujours recouvert ces sources de façon à ne laisser passer que les rayonnements γ du dépôt actif à évolution rapide. Le dépôt actif à évolution lente qui, lui, n'est pas en équilibre avec le radium ne produit aucun effet ionisant.

Appelons I_{Ra} l'intensité de la source de radium, I_0 étant l'intensité initiale de la source de période T à mesurer.

Au temps $t = 0$ on réalise le montage pour que les deux sources produisent le même courant dans les deux chambres

$$I_0 = I_{Ra}.$$

Au temps t , on mesure le déséquilibre correspondant :

$$i = I_{Ra} - I = I_0(1 - e^{-\lambda t}),$$

d'où

$$\text{Log} \frac{I_0}{I_0 - i} = \lambda t, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{0,69315}{T}.$$

Les mesures de I_0 , i , t donnent T .

La mesure de I_0 est obtenue en mesurant la source de référence I_{Ra} seule de préférence à la mesure de l'autre source; l'intensité du radium ne variant

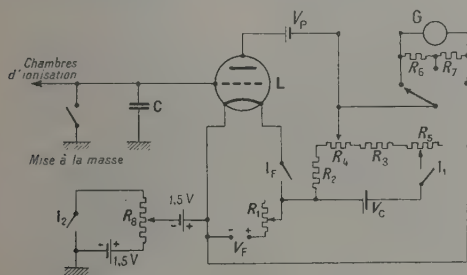


Fig. 1. — Montage compensé à une lampe électrométrique.

L, Lampe électrométrique VX 32 B; C, capacité 5 000 pF (isolement $\approx 10^{14} \Omega$); R_1 , 50 Ω ; R_2 , 175 000 Ω ; R_3 , 133 000 Ω ; R_4 , 3 200 Ω ; R_5 , 10 000 Ω ; R_6 , 7 500 Ω ; R_7 , 200 Ω ; R_8 , 100 000 Ω ; V_F , accumulateur de chauffage du filament: Cd-Ni 110 Ah, 1,3 V; V_C , pile de compensation 1,5 V; V_P : pile 4,5 V; G, galvanomètre AOIP G. 939.

toujours exactement à la même position. Le dispositif réalisé se compose principalement d'un plateau mobile sous chacune des deux chambres au moyen d'une crémaillère très fine; la distance de la source à la chambre se lit sur une règle graduée comportant un vernier. De plus, des écrans d'épaisseur et de nature variables peuvent être interposés entre la source et la chambre.

L'ensemble de l'installation se trouve dans une pièce où les variations de température et du degré d'humidité sont très réduites.

Le circuit électrométrique est à compensation automatique des variations du courant de chauffage du filament de la lampe électrométrique. Le schéma de principe du montage a été indiqué par A. Rogozinski en 1939 [10]; le montage permet d'annuler pratiquement les effets de la dérive due principalement à la décharge lente mais progressive de l'accumulateur de chauffage.

Le schéma complet du montage adopté est donné sur la figure 1.

pratiquement pas, on peut répéter la mesure autant de fois qu'il est nécessaire et même faire des mesures relatives $\frac{i}{I_0}$. Toutes les fois que la période à mesurer est très grande devant le temps de mesure, on peut employer une formule simplifiée obtenue en faisant un développement de $1 - e^{-\lambda t}$ et en se limitant au premier terme :

$$\frac{i}{I_0} = \lambda t.$$

Il faut que $|1 - e^{-\lambda t} - \lambda t|$ soit petit devant $1 - e^{-\lambda t}$. Pour $\frac{t}{T} = 10^{-3}$, l'erreur commise est $\simeq 4 \cdot 10^{-4}$.

En pratique, il est difficile de déterminer avec précision l'instant exact de l'équilibre. Soit $t = t_0$ cet instant : le temps t où l'on fait la mesure est évalué à partir d'une origine arbitraire (le début des mesures, voisin de l'équilibre : t_0 est petit). On peut alors écrire :

$$\log \frac{I_0}{I_0 - i} = \lambda(t - t_0)$$

[et dans tous les cas où l'on peut appliquer la formule simplifiée : $\frac{i}{I_0} = \lambda(t - t_0)$], ou encore :

$$\log \frac{I_0}{I_0 - i} = \frac{0,30103}{T}(t - t_0).$$

Si l'on pose

$$y = \log \frac{I_0}{I_0 - i} \quad \text{et} \quad x = t,$$

on obtient une droite

$$y = ax + b$$

de pente :

$$a = \frac{0,30103}{T}$$

et d'ordonnée à l'origine :

$$b = -\frac{0,30103}{T} t_0.$$

Pour déterminer I_0 et i , on opère par vitesse de déviation :

$$I_0 = S \frac{I_0}{C}, \quad v = S \frac{i}{C},$$

S , sensibilité en tension du montage : $S = 14000 \text{ mm/V}$, C , capacité électrostatique totale du circuit d'entrée : $C = 5 \cdot 10^{-9} \text{ F}$.

On a alors

$$\log \frac{V_0}{V_0 - v} = \frac{0,30103}{T}(t - t_0).$$

L'analyse des mesures ainsi que le calcul d'erreurs se font par la méthode des moindres carrés.

Mesures de périodes radioactives. — ^{60}Co . — Sampson, Ridenour et Bleakney [11] en 1937 furent

les premiers à indiquer une activité de longue période pour le ^{60}Co . Plus tard, J. J. Livingood, F. Fairbrother et G. T. Seaborg [12] indiquent une période supérieure à 1 an. La même année, J. R. Risser [13] donne $2,0 \pm 0,5$ ans. En 1941, J. J. Livingood et G. T. Seaborg [14] mesurent 5,3 ans. En 1949, E. Segré et C. E. Wiegand [9] suivent une source de ^{60}Co pendant 8 jours par la méthode d'ionisation différentielle et obtiennent 5,08 ans. G. L. Brownell et C. J. Maletskos [15] en 1950 étudient pendant 18 mois la décroissance de ^{60}Co et trouvent une période de $5,26 \pm 0,17$ ans. En 1951, A. R. Brosi et B. H. Ketelle [16] indiquent $5,1 \pm 0,1$ ans et W. K. Sinclair et A. F. Holloway [17] : $5,25 \pm 0,21$ ans, ayant fait une étude pendant 21 mois

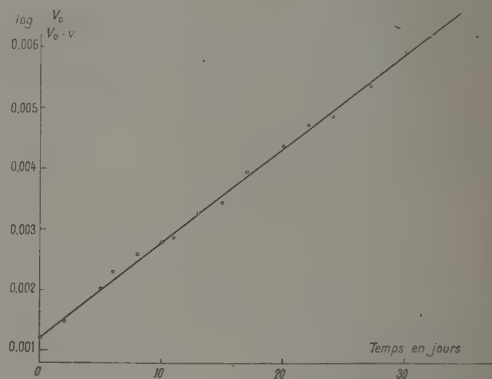


Fig. 2. — Période de ^{60}Co .

à la chambre d'ionisation. Enfin en 1953, E. E. Lockett et R. H. Thomas [18] font des observations pendant 8 mois au moyen d'un électroscope et trouvent $4,95 \pm 0,04$ ans et J. Kastner et G. N. Whyte [19] observent la décroissance pendant 3 ans à la chambre d'ionisation et indiquent $5,21 \pm 0,04$ ans.

Le ^{60}Co utilisé provient de l'United States Atomic Energy Commission sous forme de solution Cl_2Co dans ClH . Une purification a été effectuée par chromatographie sur papier au laboratoire Curie. Plusieurs gouttes de la solution purifiée ont été déposées au centre d'un support constitué par une feuille mince de polystyrène puis évaporées, une deuxième feuille de polystyrène recouvrant la source. Une source d'intensité $200 \mu\text{g-ég}$ de radium dans les conditions expérimentales a été ainsi préparée et suivie pendant 32 jours ; 16 séries de mesures ont été effectuées, soit une tous les deux jours. Pendant l'étude, la décroissance totale de la source de ^{60}Co a été de 1,15 pour 100 par rapport à la valeur initiale de son intensité.

La figure 2 montre la droite $\log \frac{V_0}{V_0 - v} = f(t)$ obtenue.

On obtient :

$$T = 5,27 \pm 0,07 \text{ ans}$$

correspondant à

$$\lambda = (0,1315 \pm 0,0017) \text{ an}^{-1} = (4,17 \pm 0,05) \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1},$$

la précision est de 1,28 pour 100.

Ce résultat est en bon accord avec la plupart des résultats antérieurs. La précision obtenue est en général plus grande et surtout le temps de mesure est considérablement plus court.

^{222}Rn . — La période de décroissance radioactive du ^{222}Rn (émanation du radium) est très bien connue depuis les mesures concordantes de I. Curie et C. Chamié [4] en 1924 : $3,823 \pm 0,002$ jours et W. Bothe [20] en 1923 : $3,825 \pm 0,003$ jours. La Commission internationale réunie en 1931 [21] a retenu la valeur 3,825 jours.

Cependant il nous a paru utile d'effectuer une nouvelle détermination de la période du ^{222}Rn de façon à éprouver notre dispositif expérimental.

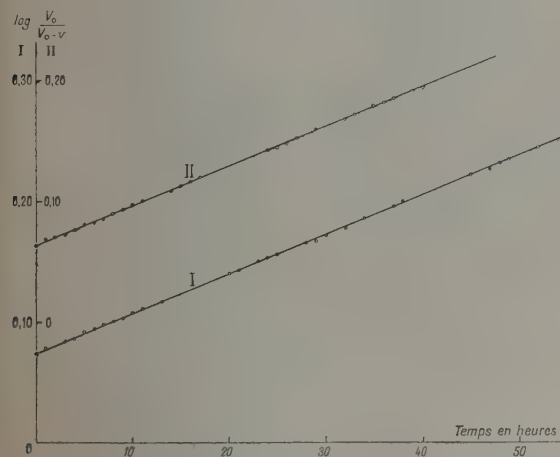


Fig. 3. — Période de ^{222}Rn .

Deux sources de radon, sous forme d'ampoules scellées ont été utilisées pour cette étude, le radon étant en équilibre avec le dépôt actif à évolution rapide. Les mesures ont été faites en filtrant le rayonnement émis à travers 1 cm de plomb, le rayonnement de la source de référence de radium étant également filtré par un écran de plomb de 1 cm d'épaisseur. La première source a été étudiée pendant 54 h, la deuxième pendant 40 h; 30 séries de mesures ont été faites pour chacune des sources. De plus, entre la première et la deuxième série de mesures les positions des sources de radium et de radon ont été interverties ainsi que les polarités des tensions sur les chambres d'ionisation. Cette manière de procéder a permis de voir si une dissymétrie possible de l'appareillage n'influait pas le résultat des mesures. Appelons I et II les deux dispositions considérées pour les sources.

On a obtenu les résultats suivants :

Première source, disposition I :

$$3,826 \pm 0,006 \text{ jours;}$$

Deuxième source, disposition II :

$$3,821 \pm 0,010 \text{ jours.}$$

On a représenté figure 3 les courbes correspondantes.

En employant la méthode statistique habituelle pour la moyenne des résultats, on obtient la période du radon :

$$T = 3,825 \pm 0,005 \text{ jours,}$$

la constante radioactive λ a pour valeur

$$\begin{aligned} \lambda &= (0,1812 \pm 0,0002) \text{ jours}^{-1} \\ &= (2,097 \pm 0,003) \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

La précision obtenue est de 1,3 pour 1000.

Le résultat est en accord avec la valeur admise en 1931 [21] et avec celle de I. Curie et C. Chamié [4] aux erreurs expérimentales près. On constate, de plus, qu'il n'y a pas de différence entre les résultats obtenus pour les dispositions I et II.

^{227}Ac . — La période de l'actinium a été déterminée pour la première fois en 1911 par Marie Curie [22], par la mesure de la décroissance, la valeur trouvée étant de 21 ans. En 1918, O. Hahn et L. Meitner [23] en suivant d'une part la décroissance directe de l'actinium, d'autre part sa croissance dans le protactinium trouvent 20 ans. En 1928, St. Meyer [24] ayant fait également l'étude de la décroissance directe et de la croissance dans le protactinium, ses expériences ayant duré 14 ans, indique une période de 13,4 ans. I. Curie et G. Bouissières [25], en 1944, donnent le résultat de mesures, portant sur 12 années, sur la croissance de l'activité de préparations de protactinium pur : 21,7 ans. F. Wagner [26] en 1950 trouve 27,7 ans après une étude de 250 jours à la chambre d'ionisation. Enfin en 1950 également J. M. Hollander et R. F. Leininger [27] ont étudié pendant 100 jours par la méthode d'ionisation différentielle une source d'actinium produit dans une pile : ils indiquent $22,0 \pm 0,3$ ans.

On a utilisé une source d'actinium dont la décroissance a été suivie pendant 7 ans au laboratoire Curie. Depuis juillet 1947, cinq séries de mesures ont été effectuées au grand condensateur du Service des Mesures de l'Institut du Radium. Chaque mesure est faite par comparaison avec un étalon de radium; le rayonnement des sources étant filtré par 1 cm de plomb, les rayons γ les plus pénétrants contribuent seuls à l'ionisation. Pendant la durée des mesures, l'intensité de la source a diminué de 19 pour 100, l'intensité initiale étant de 1,17 mg-éq de radium et à la fin des mesures 0,96 mg-éq Ra. En analysant les résultats des mesures par la méthode des moindres carrés on trouve une période de

$$T = (21,8 \pm 1,4) \text{ ans.}$$

La précision est de 6,5 pour 100.

La même source a servi à la détermination de la période par la méthode d'ionisation différentielle, les rayonnements qui sortent de la source étant de même filtrés par un écran de plomb d'épaisseur 1 cm; la source de compensation de radium était elle-même recouverte par 5 mm de plomb. L'étude s'est poursuivie pendant 137 jours, la source d'actinium ayant décré de 1,2 pour 100 pendant ce temps; 34 séries de mesures ont été effectuées, soit en moyenne une tous les quatre jours. La droite correspondante

$$\log \frac{V_0}{V_0 - v} = f(t)$$

est représentée figure 4.

On a obtenu :

$$T = 21,6 \pm 0,4 \text{ an-}$$

et

$$\lambda = (1,017 \pm 0,020) \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1},$$

la précision est de 2 pour 100.

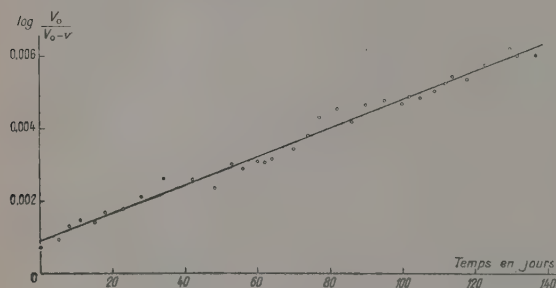


Fig. 4. — Période de ^{227}Ac .

Il est intéressant de comparer le résultat $21,6 \pm 0,4$ ans obtenu après une étude de 137 jours par la méthode différentielle et celui $21,8 \pm 1,4$ ans en suivant directement la décroissance de la source pendant 7 ans. On voit immédiatement l'avantage de la méthode utilisée qui permet d'avoir un résultat 3,5 fois plus précis en un temps 17 fois plus court.

Le résultat de 21,6 ans est en accord avec la valeur de I. Curie et G. Bouissières, 21,7 ans, et celle de J. M. Hollander et R. F. Léninger, 22,0 ans, obtenue par une méthode analogue à la nôtre.

^{67}Ga . — Le ^{67}Ga se désintègre en ^{67}Zn par capture d'électrons. La capture est complexe; on a constaté la présence de rayonnements γ d'énergies 0,18, 0,30 et 0,09 MeV. En 1938, J. H. Buck [28] indique une période de $84,4 \pm 2,0$ h. En 1948, D. A. Mc Cown, L. L. Woodward et M. L. Pool [29] trouvent $78,2 \pm 0,5$ h.

La source de ^{67}Ga qui a servi dans nos mesures a été préparée par J. K. Major du Laboratoire Curie.

Elle a été obtenue en bombardant une cible de zinc avec les deutons du cyclotron du Collège de France (deutons d'énergie 6,8 MeV). Le gallium a été séparé sans entraîneur par extraction à l'éther.

L'étude du ^{67}Ga a été effectuée pendant une demi-période (40 h), ce qui conduit à :

$$T = 77,9 \pm 0,3 \text{ h}$$

et

$$\lambda = (2,471 \pm 0,009) \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}.$$

Le résultat est en accord avec celui de Mc Cown, L. L. Woodward et M. L. Pool [29].

^{24}Na . — La mesure de la période du ^{24}Na a fait l'objet d'un assez grand nombre de travaux. Citons, en particulier, ceux de R. Wilson et G. R. Bishop [30]: $14,90 \pm 0,02$ h, A. K. Solomon [31]: $15,04 \pm 0,06$ h, J. H. Sreb [32]: $15,06 \pm 0,039$ h, W. K. Sinclair et A. F. Holloway [17]: $15,0 \pm 0,1$ h et enfin E. E. Lockett et R. H. Thomas [18]: $14,97 \pm 0,02$ h.

Les sources de ^{24}Na que nous avons utilisées ont été préparées en irradiant du carbonate de sodium très pur avec les neutrons lents de la pile de Châtillon.

Deux sources ont été étudiées l'une et l'autre pendant 10 h. On a fait 23 séries de mesures pour la première, et 15 pour l'autre source. La décroissance relative des sources pendant la durée de l'expérience a été de 37 pour 100.

La deuxième série d'expériences a été réalisée en intervertissant les positions des sources de compensation et de ^{24}Na comparativement à la première série, les signes des tensions sur les chambres d'ionisation étant également changés.

On a obtenu les résultats suivants :

Première source, position I :

$$14,90 \pm 0,07 \text{ h;}$$

Deuxième source, position II :

$$14,91 \pm 0,09 \text{ h,}$$

Moyenne :

$$T = 14,90 \pm 0,05 \text{ h,}$$

$$\lambda = (1,292 \pm 0,005) \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}.$$

On constate que, de même que dans le cas du ^{222}Rn , il n'y a pas de différence entre les résultats des mesures I et II.

^{64}Cu . — En 1936, S. N. Van Voorhis [33] indique une période de $12,8 \pm 0,1$ h ayant suivi la décroissance du ^{64}Cu pendant dix périodes à la chambre d'ionisation. L. M. Silver [3] en 1949 précise une valeur de $12,88 \pm 0,03$ h après une étude de 160 h. E. Rabinowitz [34] trouve 12,80 h en 1950, et enfin en 1951 R. P. Schuman et A. Camilli [35] indiquent $12,74 \pm 0,07$ h.

Notre source de ^{64}Cu a été préparée en faisant irradier par les neutrons lents de la pile de Châtillon plusieurs petits disques de cuivre électrolytique

de très grande pureté. Le cuivre actif est alors enfermé dans un petit support en cuivre inactif. L'ionisation dans la chambre est obtenue principalement par les rayonnements γ d'annihilation des positons du ^{64}Cu (énergie de 0,511 MeV) dans le cuivre du support.

La durée totale de l'expérience a été de 12 h, 33 points de la courbe de décroissance ayant été déterminés pendant ce temps. On trouve

$$T = 12,80 \pm 0,03 \text{ h},$$

$$\lambda = (1,504 \pm 0,004) \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Notre valeur est en bon accord avec la valeur la plus récente publiée dans la littérature, celle de R. P. Schuman et A. Camilli : $12,74 \pm 0,07 \text{ h}$.

^{198}Au . — Un certain nombre de travaux ont été déjà publiés en ce qui concerne la période de décroissance de ^{198}Au . On peut, en particulier, indiquer ceux de Mc Millan, M. Kamen et S. Ruben [36] en 1937 : 2,7 jours; D. Saxon et R. Heller [37] en 1949 : $2,69 \pm 0,02$ jours. En 1951, L. M. Silver [3] trouve $2,69 \pm 0,01$ jours après une étude de 32 jours à la chambre d'ionisation. La même année, W. K. Sinclair et A. F. Holloway [17] suivent une source de ^{198}Au pendant quatre périodes : ils donnent $2,73 \pm 0,01$ jours. Enfin, postérieurement à nos mesures, E. E. Lockett et R. H. Thomas [18]

en 1953 étudient la décroissance pendant 10 jours à l'électroscope et trouvent $2,697 \pm 0,003$ jours.

On a préparé notre source de ^{198}Au en faisant irradier à la pile de Châtillon une petite feuille d'or de grande pureté :



Cette source a été suivie pendant une période environ, ce qui donne le résultat :

$$T = 2,686 \pm 0,005 \text{ jours}$$

et

$$\lambda = (2,986 \pm 0,005) \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Conclusion. — La méthode d'ionisation différentielle présente ainsi un grand intérêt pour les mesures de périodes longues (de quelques mois à quelques dizaines d'années) permettant d'obtenir des résultats qui sont parmi les plus précis, en des temps bien plus courts que dans les méthodes habituellement utilisées : 1 mois d'étude pour le ^{60}Co (5 ans), 4 mois pour ^{227}Ac (22 ans). La méthode est également intéressante pour les périodes plus courtes, donnant rapidement des résultats précis. Il est cependant nécessaire dans toutes ces mesures d'utiliser des sources de très grande pureté. De plus, la position des sources par rapport aux chambres d'ionisation doit être parfaitement bien définie.

Manuscrit reçu le 31 mai 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] SREB J. H. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 643.
- [2] COBBLE J. W. et ATTEBERY R. W. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 917.
- [3] SILVER L. M. — *Canad. J. Phys.*, 1951, **29**, 59.
- [4] CURIE I. et CHAMIE C. — *J. Physique Rad.*, 1924, **5**, 238.
- [5] RUTHERFORD E. — *Wien. Ber.*, 1911, **120**, 303.
- [6] CURIE M. — *Ann. Phys.*, 1924, **2**, 405.
- [7] PICCARD A. et MEYLAN L. — *J. Physique Rad.*, 1933, **4**, 715.
- [8] BOUCHEZ R., DAUDEL P. et R., MUXART R. et ROGOZINSKI A. — *J. Physique Rad.*, 1949, **10**, 201.
- [9] SEGRÉ E. et WIEGAND C. E. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 39.
- [10] ROGOZINSKI A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1939, **208**, 427.
- [11] SAMPSON, RIDENOUR et BLEAKNEY. — *Phys. Rev.*, 1937, **50**, 382.
- [12] LIVINGOOD J. J., FAIRBROTHER F. et SEABORG G. T. — *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 135.
- [13] RISSER J. R. — *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 768.
- [14] LIVINGOOD J. J. et SEABORG G. T. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 913.
- [15] BROWNELL G. L. et MALETSKOS C. J. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 1102.
- [16] BROSI A. R. et KETELLE B. H. — 1950 Nuclear Data. Circular 499.
- [17] SINCLAIR W. K. et HOLLOWAY A. F. — *Nature*, 1951, **167**, 365.
- [18] LOCKETT E. E. et THOMAS R. H. — *Nucleonics*, 1953, **11**, 14.
- [19] KASTNER J. et WHYTE G. N. — *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 332.
- [20] BOTHE W. — *Z. Physik*, 1923, **16**, 266.
- [21] International Radium Standard Commission Report. *Rev. Mod. Physics*, 1931, **3**, 427.
- [22] CURIE M. — *Le Radium*, 1911, **8**, 353.
- [23] HAHN O. et MEITNER L. — *Phys. Z.*, 1918, **19**, 208.
- [24] ST. MEYER. — *Mitt. Inst. Rad.*, 1928, **218**, 235.
- [25] CURIE I. et BOUSSIÈRES G. — *Cahiers de Physique*, 1944, **26**, 1.
- [26] WAGNER Jr. F. — *A.N.L.*, 1950, n° 4490, 5.
- [27] HOLLANDER J. M. et LEININGER R. F. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 915.
- [28] BUCK J. H. — *Phys. Rev.*, 1938, **54**, 1025.
- [29] McCOWN D. H., WOODWARD L. L. et POOL M. L. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1311.
- [30] WILSON R. et BISHOP G. R. — *Proc. Phys. Soc. London*, 1949, **62**, 457.
- [31] SOLOMON A. K. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 403.
- [32] SREB J. H. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 469.
- [33] VAN VOORHIS S. N. — *Phys. Rev.*, 1936, **50**, 895.
- [34] RABINOWITZ E. — *Proc. Phys. Soc. London A*, 1950, **63**, 1040.
- [35] SCHUMAN R. P. et CAMILLI A. — *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 158.
- [36] Mc MILLAN Ed., KAMEN M. et RUBEN S. — *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 375.
- [37] SAXON D. et HELLER R. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 909.

EFFETS DE CHARGE D'ESPACE DANS UNE DÉCHARGE EN HAUTE FRÉQUENCE. I.

Par M^{lle} M. CHENOT,

École Normale Supérieure des Jeunes Filles.

Sommaire. — Une décharge excitée en haute fréquence à travers un gaz à faible pression peut être dans certaines conditions le siège d'une force électromotrice constante. Si on l'insère dans un circuit résistant relié à deux électrodes convenablement placées dans le tube à décharge, un courant continu prend naissance aux dépens de l'énergie haute fréquence. Un type particulier de caractéristique est étudié en détail et interprété de façon qualitative; l'apparition d'une force électromotrice constante dépend d'une dissymétrie de la décharge et de l'établissement d'une répartition permanente des charges spatiales dans le tube, en raison de l'inertie des ions positifs par rapport aux électrons. Quelques remarques sont présentées sur l'emploi des sondes de Langmuir dans les décharges excitées sur ondes métriques.

Introduction. — J'avais décrit sommairement [1] en 1948 des expériences sur la décharge en haute fréquence qui montraient la possibilité de faire débiter du courant continu par un tube à décharge excité sur ondes métriques, à condition de réaliser une disposition convenable des paires d'électrodes externes et internes dont le tube était muni.

Des observations anciennes de Kirchner et de Rohde se rapportent évidemment à ce phénomène. Kirchner [2] utilisait un tube à électrodes internes dont l'une était portée à un certain potentiel H. F. qui excitait la décharge; si l'on portait la seconde à un potentiel constant, la colonne lumineuse se déplaçait en bloc comme une masse chargée positivement et Kirchner avait noté que, sans tension constante, un galvanomètre inséré dans le circuit décelait un petit courant.

Rohde [3] reliait un circuit oscillant, d'une part à un anneau enfilé sur un tube cylindrique et, d'autre part, par l'intermédiaire de condensateurs, à deux électrodes internes placées vers les extrémités du tube; il constatait qu'un milliampèremètre relié à ces dernières électrodes était traversé par un courant continu dès qu'une dissymétrie apparaissait dans la décharge. Avec une tension d'excitation de 500 V, Rohde [4] a obtenu des courants dont l'intensité atteignait 50 mA. Il déduisait de ces faits l'existence de charges d'espace importantes dans une décharge H. F. C'est seulement à une date récente que j'ai pris connaissance d'un travail de Rotzeig qui semble avoir étudié en détail l'effet de redressement observé par Rohde, mais le résumé publié [5] ne fournit pas de précisions quantitatives, ni de détails sur l'interprétation des résultats.

J'ai montré [6] qu'il existe des différences essentielles entre ce phénomène et l'effet de redressement qui se produit dans les tubes à électrodes froides

dissymétriques avec décharge lumineuse; dans le cas étudié, le tube est le siège d'une force électromotrice constante dans des conditions déterminées et se comporte comme une « pile ». Avec le montage de Kirchner, cette conclusion n'était pas évidente; elle s'impose avec le montage de Rohde, repris par Rotzeig. L'origine du champ électromoteur doit être recherchée dans les phénomènes de diffusion forcée qui interviennent dans la colonne gazeuse où le champ de haute fréquence agit pour maintenir une certaine répartition moyenne des charges spatiales du plasma. On sait que des fluctuations de la charge spatiale en un point d'une décharge sous tension continue peuvent s'entretenir et produire une émission d'énergie H. F. aux dépens de l'énergie continue fournie à la décharge. En sens inverse, on conçoit qu'une répartition non uniforme de charges spatiales, permanente en moyenne, et entretenue par une décharge H. F., puisse fournir de l'énergie continue aux dépens de l'énergie H. F.

Enfin j'ai décrit brièvement [7] quelques types de caractéristiques courant-tension d'un tube à décharge ainsi utilisé. La description détaillée des expériences réalisées sur ce sujet fait l'objet du présent Mémoire. Ces expériences comportent l'étude systématique de décharges mixtes où l'action d'une tension continue se superpose à l'excitation H. F. qui provoque la décharge; outre les renseignements qu'elles fournissent sur le comportement des plasmas H. F., elles posent sous un nouvel aspect le problème de l'usage des sondes dans les décharges H. F. Elles peuvent enfin présenter un certain intérêt pour la réalisation des sources d'ions du type proposé d'abord par Thonemann [8], [9], où un champ continu sert à l'extraction des ions positifs d'un plasma excité sur ondes métriques. Si les faits expérimentaux permettent de dégager des conclusions précises, leur interprétation ne sera souvent

qu'hypothétique en raison de l'extrême complexité des phénomènes.

Description et excitation des tubes à décharge.

— J'ai utilisé différents tubes qui seront désignés

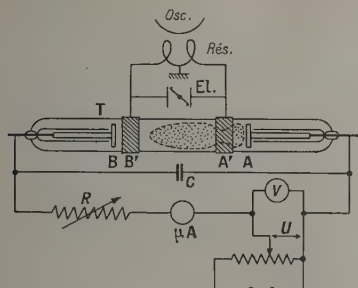


Fig. 1.

par leur numéro. La plupart sont des tubes cylindriques en Pyrex de diamètre intérieur D , munis de deux électrodes internes planes circulaires A et B de diamètre d , placées à une distance l , selon le schéma de la figure 1. Le tableau I donne les dimensions de ces tubes. Les électrodes sont en aluminium, sauf pour le tube 5 qui a des électrodes de nickel.

TABLEAU I.

N° du tube.	D (mm).	d (mm).	l (mm).
3.....	18	16	96
5.....	23	16	98
6.....	18	16	97
7.....	30	17	101
9.....	17	16	61
10.....	17	16	205
12.....	33	30	102
13.....	22	18	110
17.....	17	16	100

D'autres tubes sont représentés sur la figure 2.

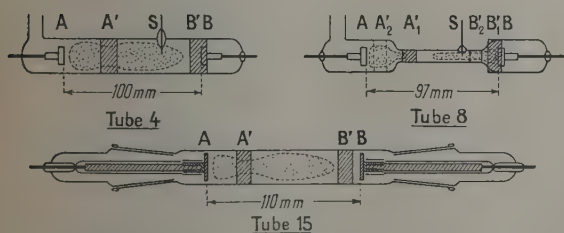


Fig. 2.

Le tube 4 porte latéralement une troisième électrode S en fil de tungstène. Le tube 8 présente une partie médiane de diamètre plus faible et a éga-

lement une sonde latérale. Le tube 15 a les électrodes vissées sur des tiges portées par des rodages, ce qui a permis d'utiliser successivement des électrodes d'aluminium, de nickel et de cuivre. Les dimensions de ces tubes correspondent à l'échelle indiquée sur la figure.

Sauf indication contraire, les mesures sont faites dans la vapeur de mercure saturante à la température de la salle, vapeur provenant d'une jauge de MacLeod qui se trouvait sur la canalisation de vide.

L'excitation H. F. est produite à l'aide de deux électrodes externes annulaires A' et B' reliées aux extrémités d'un résonateur de longueur variable, couplé à un oscillateur à ondes courtes dont le circuit de plaque consomme une puissance d'environ 60 W. Ce mode d'excitation sera dit bipolaire externe. Le milieu de la self du résonateur est mis à la terre; cette précaution est nécessaire si l'on ne veut pas avoir de difficultés dans la mesure de la différence de potentiel de haute fréquence U_c entre les électrodes externes au moyen d'un électromètre idiostatique Gutton et Laville [10]. Pour éviter la dérivation de courants de haute fréquence vers le circuit à courant continu, j'ai utilisé dans quelques mesures des selfs de choc au départ des fils venant des électrodes internes; dans la plupart des cas, les électrodes internes étaient mises à la masse par l'intermédiaire de condensateurs et ainsi pratiquement mises en court-circuit vis-à-vis de la haute fréquence. Le schéma de principe du montage est représenté sur la figure 1.

Détermination de la caractéristique propre d'un tube à décharge. — 1. Prenons le cas du tube 3. A l'aide d'un microampèremètre à cadre mobile, on mesure l'intensité i du courant continu débité par le tube dans une résistance R variant de plusieurs mégohms à zéro; on tient compte s'il y a lieu de la résistance du microampèremètre. Pour les distances d'électrodes indiquées sur la figure 3, la décharge présentait un grand espace sombre près de l'électrode B ; l'électrode A voisine de la colonne brillante était le pôle positif du générateur continu ainsi réalisé. Des mesures faites, on déduit la courbe caractéristique qui donne l'intensité du courant débité en fonction de la différence de potentiel $V = Ri$ entre électrodes internes. Le sens positif dans le circuit d'utilisation est celui du courant que débite le tube fonctionnant seul. Dans le gaz ionisé, il va donc de l'électrode à bas potentiel à l'électrode à haut potentiel.

La figure 3 montre l'allure de la caractéristique obtenue avec le tube peu après sa mise en service; elle fournit un type de courbe qui se rencontre souvent. A mesure que la résistance R décroît, on décrit la branche aa' , en même temps que le plasma très lumineux se déplace légèrement en sens inverse du courant, ceci jusqu'à une certaine

valeur maximum I du courant qui peut varier un peu d'un essai au suivant. A ce moment, si l'on diminue encore R , on saute de façon discontinue sur une deuxième branche bb' de la caractéristique; alors que la première branche a toujours la même allure, la seconde, selon les conditions d'excitation, peut affecter des formes diverses; la discontinuité est marquée par un petit déplacement de la colonne lumineuse qui recule brusquement en sens inverse du sens du courant débité, elle manifeste le passage à un autre régime de la décharge qui maintient d'ailleurs la même polarité du tube. Si l'on fait ensuite les mesures dans l'ordre inverse, on repasse sur la branche aa' pour des valeurs de R et V plus grandes que celles qui assuraient la chute de courant. Cette sorte d'hystérésis complique beaucoup l'étude des phénomènes, tout état de la décharge étant stable en deçà de ses conditions d'établissement.

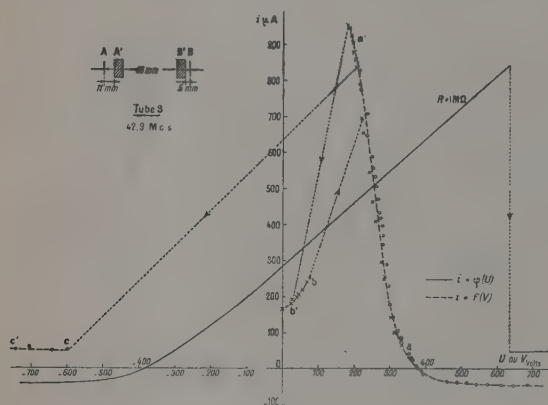


Fig. 3.

2. Le tube à décharge peut être monté en série ou en opposition avec un générateur de tension continue qui établit une différence de potentiel U entre ses bornes. La force électromotrice du générateur est positive lorsqu'elle fournit un courant de même sens que le tube dans son fonctionnement propre. Les valeurs de l'intensité du courant qui traverse dans ces conditions la résistance R permettent de prolonger la caractéristique propre dans des domaines où le courant et la différence de potentiel entre électrodes internes changent de sens par rapport à l'action propre du tube à décharge.

La figure 3 montre une courbe $i = \varphi(U)$, d'où l'on déduit la caractéristique $i = f(V)$ en calculant $V = Ri - U$. L'intensité du courant s'annule pour une valeur de U égale à $-E_0$, E_0 étant la force électromotrice propre du tube en l'absence de débit; ensuite le courant change de sens et ne croît que très lentement en valeur absolue. Lorsque U est positif, le courant croît jusqu'au moment de la discontinuité qui se produit pour une valeur du cou-

rant voisine de I ; si l'on opère avec une valeur suffisamment élevée de la résistance R , par exemple $1M\Omega$, le courant devient brusquement très petit et varie peu à mesure que U augmente. La discontinuité

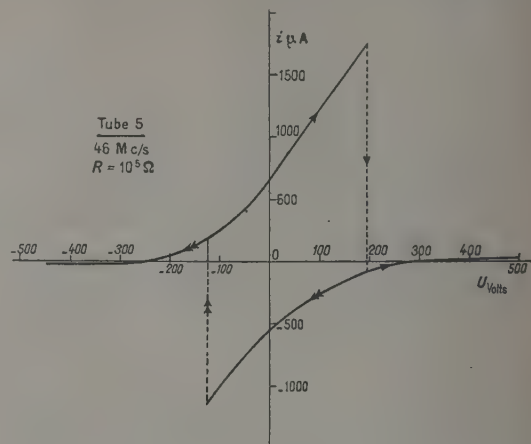


Fig. 4.

s'accompagne encore d'un recul de la colonne lumineuse. La réaction sur la tension H. F. d'entretien de la décharge est extrêmement variable suivant les conditions réalisées dans le tube; on trouve des régimes pour lesquels une grande variation de courant n'a pas d'influence sensible sur l'indication de l'électromètre.

3. La caractéristique propre déduite de la courbe $i = \varphi(U)$ recouvre bien la branche aa' de la caractéristique déterminée à partir du tube seul. Après la

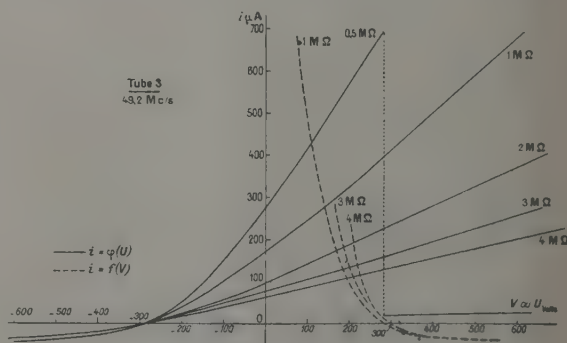


Fig. 5.

discontinuité, avec R assez grand, on ne retombe pas en général sur la branche bb' , mais sur une branche nouvelle cc' ; on doit considérer que le tube à ce moment change de polarité. En effet, si l'on diminue la tension U , on a encore un effet d'hystérésis et l'on repasse sur la courbe initiale

pour une valeur de U inférieure à celle qui occasionnait la chute de courant. Or, il est arrivé que le second état de la décharge soit assez stable pour que l'on puisse décrire un cycle tel que celui représenté sur la figure 4; la partie inférieure d'un tel cycle correspond évidemment à une polarité inversée du tube; même s'il n'en subsiste qu'un fragment, on doit conclure à un changement de polarité. La figure 5 montre un réseau de courbes correspondant à différentes valeurs de la résistance R du circuit extérieur. Il faut noter que les caractéristiques propres qu'on peut déduire de ces courbes montrent

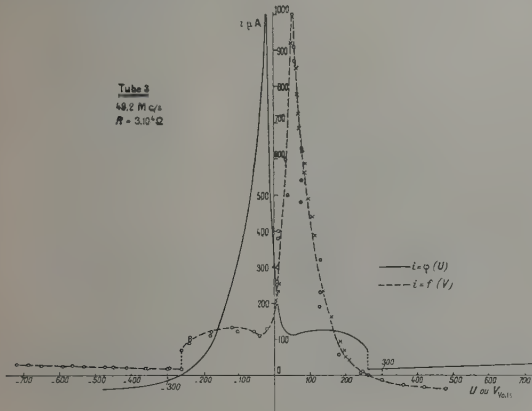


Fig. 6.

une évolution du tube à mesure que se déroulaient les essais, évolution qui les incline de plus en plus vers l'axe des i , en même temps que la région à courbure nette prend plus d'importance, sans toutefois que la valeur de E_0 change; elle sera étudiée ultérieurement. Avec R réduit (fig. 6), au lieu d'une grande discontinuité, on observe une variation rapide du courant et l'on obtient un passage progressif de la branche aa' à la branche bb' , avant de retomber sur l'état qui correspond au régime inverse cc' . Dans ce cas, le fait remarquable est d'obtenir le maximum de courant pour une tension extérieure U en opposition avec le tube.

4. A un instant donné, le tube a une force électromotrice E et une résistance interne propre ρ . Des relations

$$U = (R + \rho)i - E \quad \text{ou} \quad V = E - \rho i,$$

on déduit que, sur la partie rectiligne des caractéristiques, on peut admettre ρ et E constants, la valeur de E étant un peu inférieure à E_0 . La résistance interne étant alors définie par $\rho = -\frac{dV}{di}$, pour les courbes de la figure 3, on trouve $\rho = 143\,000\,\Omega$. On peut avoir des valeurs plus faibles; ainsi le tube 8 a fourni des valeurs de ρ s'abaissant à $15\,000\,\Omega$.

L'ordre de grandeur est le même que pour des tubes analogues excités sous tension continue, mais fonctionnant à pression plus élevée.

Dans les parties courbées des caractéristiques, E et ρ doivent varier simultanément; il est probable, comme nous le verrons, que la variation relative la plus importante est celle de E , corrélative des déplacements de la colonne lumineuse.

On pourrait définir une résistance apparente du tube R_a par le quotient $\left|\frac{V}{i}\right|$. Malgré l'ionisation certainement importante du gaz, cette résistance apparente serait considérable, aussi bien pour les grandes valeurs positives de V que pour les valeurs négatives, alors que le générateur externe impose le sens du courant sans pouvoir entretenir seul la décharge. Par exemple, dans le tube 3, alors qu'on a pu obtenir un débit maximum de $1000\,\mu\text{A}$ à travers une résistance de $30\,000\,\Omega$, dans les deux sens une tension de $800\,\text{V}$ donne seulement un courant de $50\,\mu\text{A}$, ce qui correspond à $R_a = 16\,\text{M}\Omega$. D'après ce qui précède, cette résistance apparente n'est en rien comparable à la résistance réelle de la décharge qui demeure certainement beaucoup plus faible.

5. Les effets d'hystérésis sont mis en évidence de façon commode par l'expérience suivante : on applique au circuit une tension alternative de basse fréquence (fig. 7), par exemple $50\,\text{c/s}$, et l'on enre-

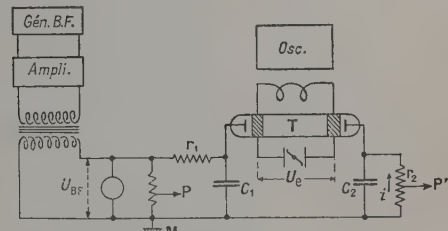


Fig. 7.

gistre à l'aide d'un oscillographe cathodique la forme du courant débité dans le circuit en même temps que celle de la tension B. F. Les condensateurs C_1 et C_2 de capacité $150\,\text{pF}$ sont choisis de manière à présenter une très faible impédance pour la haute fréquence et une forte impédance pour la basse fréquence. A la fréquence $50\,\text{c/s}$, la courbe du courant en fonction du temps peut se déduire de la caractéristique statique; pour une fréquence aussi basse, le tube laisse passer le courant surtout par conductibilité. Les oscillogrammes montrent éventuellement des variations brusques si l'amplitude de la tension est suffisante; ils présentent alors une dissymétrie nette au cours d'une période de la tension (fig. 8); certains essais semblent indiquer

d'ailleurs une légère accentuation de l'hystérésis par ce mode opératoire. Si l'on augmente la fréquence de la tension B. F. appliquée, les sauts d'intensité disparaissent et sont remplacés par une variation progressive du courant. La figure 9 reproduit une série d'oscillogrammes à différentes fréquences correspondant à deux valeurs de la résistance totale, $R_1 = 41000 \Omega$ ($r_1 = 0$) et $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ ($r_1 = 909000 \Omega$, $r_2 = 91000 \Omega$) et à une même valeur efficace de la tension B. F. égale à 300 V. Avec R_1 , le courant dérivé par le condensateur C_1 n'intervient pas; avec R_2 il provoque une chute supplémentaire de tension dans r_1 ; dans les deux cas, le courant qui traverse la résistance r_2 dans les

conditions les moins favorables diffère encore peu du courant dans le tube. Quelle que soit la forme de l'impédance complexe du tube, un changement brusque de la décharge introduirait forcément une discontinuité dans l'oscillogramme; or on constate que la discontinuité s'atténue à mesure que la fréquence augmente, un traînage s'introduit dans la décharge. Nous verrons sa signification dans la suite.

Interprétation qualitative des caractéristiques. — 1. Dans les Notes citées au début de cet article, j'ai indiqué que la production d'une tension polarisée était liée à l'existence d'une zone

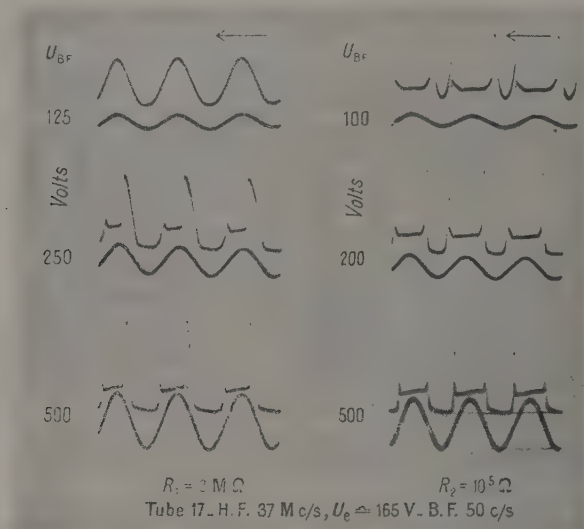


Fig. 8.

importante d'hétérogénéité dans la décharge, traduite par des différences de brillance dans son aspect lumineux; ceci s'accorde avec les observations de Rohde [3]. Les caractéristiques décrites se rapportent au cas où la décharge présente un grand espace sombre au voisinage d'une électrode interne qui joue le rôle de pôle négatif de la pile à gaz ionisé que constitue le tube à décharge.

L'aspect de la décharge suggère la répartition des charges spatiales. La colonne brillante est un plasma H. F.; l'espace sombre au voisinage immédiat de l'électrode B' doit pouvoir être assimilé à un espace sombre cathodique, c'est-à-dire à un volume dans lequel les électrons suffisamment rapides ionisent fortement le gaz et laissent une densité spatiale positive importante; une gaine sombre étroite sépare le plasma de la paroi latérale du tube, elle s'épaissit seulement à la traversée de l'électrode annulaire A' où le plasma présente un

étranglement; enfin une gaine plus ou moins mince peut exister en avant de l'électrode A.

2. Le champ H. F. est la source de l'énergie qui peut être fournie au circuit extérieur; il assure d'abord l'ionisation du gaz et maintient ensuite l'hétérogénéité de la colonne ionisée. La répartition des ions et des électrons dans le tube s'effectue en définitive sous l'action du champ H. F., de l'agitation thermique et du champ dû aux charges d'espace; elle résulte d'un phénomène complexe de diffusion forcée.

Les ions positifs, surtout les ions lourds de mercure, sont peu sensibles à l'action du champ H.F. aux fréquences où l'on opère, de l'ordre de 50 Mc/s; en pratique le courant oscillant est purement électronique. Si le champ H. F. est plus intense dans une certaine région du tube voisine d'une électrode interne, les oscillations des électrons à ce niveau

prendront une grande amplitude correspondant à une grande énergie. L'ionisation sera intense; en même temps, pendant la demi-période où les électrons se dirigent vers l'électrode, un grand nombre seront captés et ainsi balayés de la décharge, laissant un espace peuplé d'ions positifs. L'action du champ H. F. pourra ainsi engendrer un champ continu important

de charge d'espace. Les ions positifs, soustraits par leur inertie au champ H. F., obéiront à ce dernier champ; leur rôle doit être prépondérant et peut expliquer la possibilité d'un régime polarisé permanent dans le tube; ils diffuseront vers l'électrode adjacente et la paroi voisine et neutraliseront en partie la charge négative apportée par les électrons;

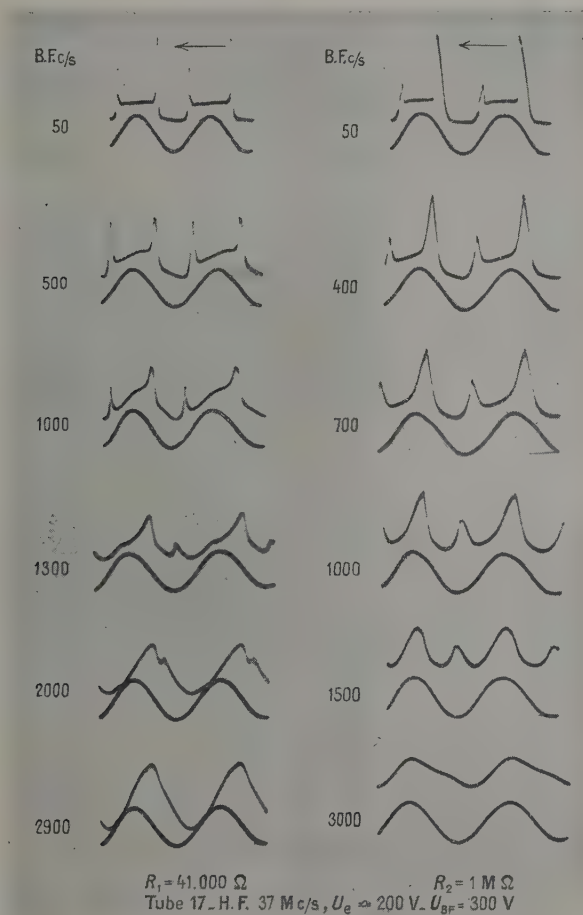


Fig. 9.

ils diffuseront aussi à travers le plasma où le champ est faible vers l'autre extrémité du tube.

Les actions combinées du champ H. F. et de l'agitation thermique représentent un champ électromoteur de diffusion forcée dont l'intégrale de B à A est égale à la force électromotrice du tube à décharge. En l'absence de débit extérieur, les charges se distribuent de manière que le champ électrostatique qu'elles créent équilibre en tout point le champ électromoteur; la force électromotrice du tube correspond donc à la valeur absolue de la

somme des différences de potentiel électrostatiques de B à A. Dans le cas considéré, l'électrode B est certainement négative par rapport au plasma; à la traversée de l'espace sombre, le potentiel croît jusqu'à la limite du plasma brillant; dans la colonne lumineuse il varie peu et subit éventuellement une petite diminution dans la gaine voisine de A. Au total le potentiel est plus élevé en A qu'en B et c'est l'action du champ H. F. qui s'oppose à son égalisation. Avec ce schéma, la plus grande partie de la force électromotrice est localisée dans l'espace

sombre. Le point difficile à élucider dans cette esquisse de théorie est le mode d'action propre du champ H. F.

3. Si l'on réunit A et B par une résistance extérieure R , l'équilibre entre le champ électromoteur et le champ électrostatique ne peut être atteint, un courant circule dans la résistance. Son passage se traduit par un petit déplacement de la colonne lumineuse en sens inverse du sens du courant, déplacement très net si l'intensité est suffisante. La brillance de la décharge s'étend dans le sens du mouvement d'ensemble des électrons, ce qui est satisfaisant : en effet, l'émission de lumière dans un plasma est due surtout aux ions excités, la recombinaison des ions et des électrons étant négligeable; les électrons qui participent au transport du courant continu peuvent exciter les ions positifs lors de leur pénétration dans une certaine épaisseur de l'espace sombre.

En diminuant la valeur de la résistance R , l'intensité du courant croît jusqu'au moment où le régime devient instable. L'électrode A joue le rôle de cathode vis-à-vis du courant débité; en même temps que l'espace sombre primitif se réduit, une gaine d'ions positifs tend à se constituer en avant de A; la polarisation initiale du tube diminue et, comme il arrive souvent dans les décharges, la rupture d'équilibre se fait très brusquement en faveur d'un nouvel état d'équilibre stable.

4. Utilisons maintenant une résistance R constante et assez grande. Si l'on applique au tube une tension U en opposition, elle freine la diffusion des ions positifs vers l'électrode A, en même temps qu'elle réduit l'influence du champ H. F. sur les électrons qui vont vers l'électrode B; la première action doit être la plus importante puisque les ions positifs n'obéissent pas au champ H. F., tandis que la seconde peut n'avoir qu'un effet lentement variable en fonction de la tension U , les électrons obéissant aux deux champs superposés. Le courant diminue, s'annule pour une tension suffisante et s'inverse; quand il devient négatif, l'électrode B joue le rôle de cathode. A partir de ce moment, les ions positifs qui frappent l'électrode B peuvent libérer des électrons dont une partie rebrousse chemin vers B pendant les alternances de sens convenable, tandis que les autres contribueront à l'ionisation du gaz. Au total il est probable que, malgré l'écoulement plus important de charges positives vers B, la densité spatiale positive dans l'espace sombre sera renforcée, donc la polarisation propre du tube augmentée. Ceci expliquerait le fait que, malgré l'application d'une tension continue de plusieurs centaines de volts, le courant garde une valeur faible qui croît très peu avec la tension appliquée.

Dans le cas inverse où l'on applique une tension

en série avec le tube, le courant croît d'abord, à peu près linéairement en fonction de la tension U . La diffusion des ions positifs vers A est favorisée, tandis que le champ continu apporte une petite contribution à l'élimination vers B d'une partie des électrons; si le premier effet est encore le plus important, le champ continu détruit l'accumulation de charges positives au niveau de B', tandis qu'un espace sombre cathodique se forme en avant de A. La polarisation du tube diminue en même temps que l'intensité du courant augmente; l'éjection d'électrons par choc des ions positifs sur A prend de plus en plus d'importance, mais ces électrons sont saisis aussitôt par le champ H. F. de l'électrode A' qui les refoule en partie vers A. Dans ce cas l'action du champ continu est double, elle annule celle du champ H. F. du côté de B' et permet au contraire son effet du côté de A'; la polarité du tube s'inverse et l'on revient au cas précédent. Toutefois le caractère discontinu du changement quand le courant atteint un certain maximum reste difficile à interpréter.

On peut enfin se demander pourquoi le passage d'un état à grand courant vers un état à faible courant revêt une allure de discontinuité quand R est grand et se fait au contraire progressivement quand R est petit. Si l'on considère les branches ascendantes des caractéristiques $i = \varphi(U)$ à partir du point commun où i est nul, on atteint le maximum de i pour une valeur positive de U quand R est grand et pour une valeur négative quand R est petit; dans le premier cas, la tension extérieure balaie les ions positifs dans le même sens que la diffusion et accélère le changement de polarisation, tandis que dans le second elle freine la diffusion et ne permet qu'un changement progressif de la décharge. L'allure du phénomène n'est d'ailleurs pas liée à la valeur absolue de R , mais à la position de la caractéristique; d'autres tubes, par exemple le tube 10 sous excitation réduite, ont montré une transformation graduelle même avec $R = 1\text{ M}\Omega$.

5. L'effet de traînage décrit précédemment peut être attribué à l'inertie des porteurs de charges. Si l'on admet que le passage d'un état de la décharge à un autre dépend d'une réorganisation de la distribution des charges positives, dans une expérience dynamique, et non plus statique, cette réorganisation pourra demander un certain temps pour s'effectuer, d'où le traînage observé.

Emploi des sondes dans les décharges H. F.

— Les résultats précédents suggèrent certaines remarques relatives à l'emploi des sondes dans les décharges H. F. Quelques chercheurs ont tenté, en effet, d'adapter la méthode bien connue de Langmuir à la détermination des grandeurs caractéristiques de telles décharges. Banergi et Ganguli [11] ont étudié dès 1931 les courants de sonde

en divers points d'une décharge H. F. Ils arrivaient aux conclusions suivantes : *a.* Dans la colonne brillante, le potentiel est presque constant comme dans une décharge sous tension continue; *b.* La température électronique est plus grande dans les régions lumineuses que dans les régions sombres; *c.* Le champ H. F. a pour effet de concentrer les ions positifs près des électrodes externes d'excitation et de chasser les électrons de ces régions; *d.* Enfin, dans une décharge à basse pression dans la vapeur de mercure, le potentiel d'espace mesuré par rapport à une électrode de référence reliée à la terre accusait une valeur bien plus grande que dans les expériences dans l'air ou dans l'hydrogène conduites à pression plus élevée.

L'existence de potentiels d'espace considérables dans une décharge H. F. fut ensuite reconnue dans un court article par van Dorsten [12] qui l'attribua à la grande différence d'inertie entre les électrons et les ions positifs. Tandis que l'amplitude d'oscillation des ions est pratiquement nulle, l'amplitude d'oscillation des électrons peut dépasser la distance des électrodes; une grande partie des électrons atteint les électrodes dans chaque demi-période et disparaît de la décharge; il reste une charge d'espace positive et, par conséquent, un gradient de potentiel important dans certaines parties de la décharge.

Tous ces résultats ont été vivement critiqués par H. Beck, ainsi que les observations de Kirchner, de Rohde et de Rotzeig rappelées au début de cet article. Dans une importante étude comparative des décharges sous tension continue et en H. F., H. Beck [13] réalisait des plasmas avec les deux modes d'excitation et jugeait de leur similitude par l'étude des spectres émis. Appliquant ensuite la méthode des sondes, il trouvait des résultats analogues pour les températures électroniques dans les deux modes de décharge, mais non pour les potentiels d'espace. Il en concluait que la méthode devait

être rejetée en ce qui concernait la détermination du potentiel d'espace. Si certaines critiques de Beck sont justifiées quant aux conditions rigoureuses d'emploi des sondes, les résultats de Beck aussi bien que ceux de tous les auteurs cités forment un ensemble cohérent avec l'interprétation que je propose, qui rejoint d'ailleurs les idées de Rohde et surtout celles de van Dorsten. Les courants de sonde sont déterminés à ces fréquences élevées par un état moyen stationnaire du plasma et c'est une distribution de champ constant qu'ils décèlent.

Comme électrode de référence GS, Beck utilisait une grosse électrode cylindrique à surface ondulée, placée dans la région de la décharge brillante, et deux sondes filiformes dont l'une S_1 se projetait à l'intérieur de l'électrode de référence, tandis que l'autre S_2 en était distante de 5 cm, toutes deux plongeant également dans la décharge lumineuse. D'après mes observations, la différence de potentiel entre S_1 et S_2 devait effectivement être négligeable, tandis que la différence de potentiel entre GS et S_1 était faible. Au contraire, Banergi et Ganguli utilisaient une grosse électrode de référence placée à bonne distance de la décharge en dehors de l'intervalle compris entre les électrodes externes qui servaient à l'excitation, de sorte que la sonde était au contact du plasma brillant, alors que l'électrode de référence devait se trouver voisine d'un espace plus sombre, d'où une différence de potentiel importante entre les deux, surtout dans le cas de la décharge à basse pression.

Nous verrons dans un prochain article d'autres caractères de ces décharges qui confirment les hypothèses précédentes. Nous examinerons également d'autres formes de caractéristiques; les facteurs qui déterminent le sens et la grandeur de la force électromotrice du tube seront étudiés.

Manuscrit reçu le 2 avril 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] CHENOT M^{lle} M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 45.
- [2] KIRCHNER F. — *Ann. Physik*, 1930, **7**, 798.
- [3] ROHDE L. — *Ann. Physik*, 1932, **12**, 569.
- [4] ROHDE L. — *Phys. Z.*, 1931, **32**, 550.
- [5] ROTZEIG B. — *Hochfreq. Techn. El. Ak.*, 1934, **43**, 65.
- [6] CHENOT M^{lle} M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 608.
- [7] CHENOT M^{lle} M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 1152.
- [8] THONEMANN P. C. — *Nature*, 1946, **158**, 61.
- [9] THONEMANN P. C. — *Progr. Nucl. Phys.*, 1953, **3**, 219.
- [10] GUTTON C. et LAVILLE. — *Ann. P.T.T.*, 1925, **14**, 299.
- [11] BANERGI et GANGULI. — *Phil. Mag.*, 1931, **11**, 410.
- [12] VAN DORSTEN A. C. — *Nature*, 1933, **132**, 675.
- [13] BECK H. — *Z. Physik*, 1935, **97**, 355.

ÉTUDE DE LA CAPTURE ÉLECTRONIQUE DANS LA DÉSINTÉGRATION DU NUCLIDE ^{22}Na

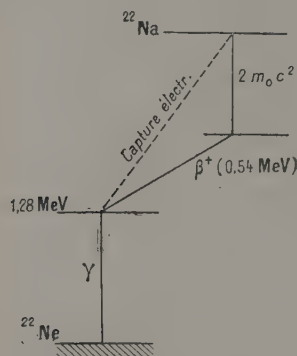
Par G. CHARPAK,

Laboratoire de Physique et Chimie nucléaires, Collège de France, Paris.

Sommaire. — L'étude de ^{22}Na est faite avec un compteur Geiger 4π . On met en évidence l'émission d'un rayonnement de très basse énergie, indépendant des rayons β^+ , complètement absorbé dans un film de quelques microgrammes par centimètre carré d'aluminium ou de matière plastique LC 600 et attribué aux électrons Auger d'énergie maximum 0,85 keV, qui suivent la capture électronique. En raison du très faible parcours de ces électrons, nous sommes amenés à discuter particulièrement une méthode simple de préparation de sources radioactives minces et uniformes. Nous obtenons la valeur du rapport

$$\frac{\text{Capture } K}{\text{Emission } \beta^+} = (6,5 \pm 0,9) \text{ pour } 100.$$

Introduction. — Le nuclide ^{22}Na se désintègre suivant le schéma de la figure 1.

Fig. 1. — Schéma de désintégration du ^{22}Na .

Divers auteurs ont tenté de mesurer le rapport

$$\frac{P_e}{P_+} = \frac{\text{Capture électronique}}{\text{émission } \beta^+}.$$

Ce problème, outre son intérêt théorique a une certaine importance pratique, car ^{22}Na est souvent utilisé pour calibrer l'efficacité des compteurs à scintillations et il est important de savoir si le nombre des positons est égal à celui des quanta de 1,28 MeV.

Le tableau I donne le résultat de diverses mesures.

La nature de la transition du ^{22}Na au ^{22}Ne n'est pas connue avec certitude. En admettant que la transition soit permise ($\Delta J = 1$ ou 0, non), le calcul théorique donne $\frac{P_e}{P_+} = 0,11$ en excellent accord avec la mesure la plus précise de Miller et Sherr [5].

TABLEAU I.

$\frac{P_e}{P_+}$	Auteurs.
0.....	Bothe (1945)
0 \pm 0,05....	Good W. M. et coll. (1946)
0,10 \pm 0,05....	Bouchez R. (1950)
0,04 \pm 0,03....	Major J. K. (1951)
0,07 \pm 0,02....	Hornyak W. F. et Coor T. (1953)
0,110 \pm 0,006...	Miller R. H. et Sherr R. (1954)

La méthode de ces auteurs repose sur la comparaison du nombre absolu de positons et de rayons γ de 1,28 MeV émis par une source de ^{22}Na . Notre travail, entrepris avant la publication des résultats de Miller et Sherr, ne nous permet pas d'atteindre une aussi grande précision dans le cas particulier du ^{22}Na . Cependant la méthode utilisée offre des possibilités d'emploi plus général.

Principe de la méthode. — La capture électronique dans le ^{22}Na se traduit essentiellement, en raison du rendement de fluorescence voisin de zéro, par l'émission d'électrons Auger du néon dont l'énergie maximum est de 0,85 keV.

Le spectre β^+ comporte certainement un nombre infime de positons de cette énergie à cause de la répulsion coulombienne avec le noyau.

Une méthode d'absorption peut donc en principe permettre la mise en évidence de la capture. La difficulté essentielle réside dans la détection des électrons et dans la préparation de sources suffisamment minces par rapport au parcours des électrons de 0,85 keV. Celui-ci est au maximum de quelques microgrammes par centimètre carré, soit quelques centaines de couches atomiques.

Mesures. — La source est préparée à partir d'une solution de chlorure de sodium dont l'activité

spécifique est de 1 mC de ^{22}Na par milligramme de matière. Elle est déposée par la méthode de sublimation à l'air, décrite avec M. Chemla dans une Note récente [7], sur un support de source de LC 600, aluminisé de chaque côté et dont la masse superficielle totale est de $20 \mu\text{g}/\text{cm}^2$.

Le support de source, tendu sur un trou de diamètre 1 cm constitue la surface de séparation de deux compteurs 2π . Le diamètre de la source est de 5 mm. Nous pouvons mesurer le nombre d'impulsions N_1 et N_2 dans chaque compteur, ainsi que les coïncidences N_c .

Les fils des deux compteurs peuvent également être connectés en parallèle. Le nombre d'impulsions alors compté, $N_{4\pi}$ est égal à $N_1 + N_2 - N_c$.

Afin d'obtenir une grande stabilité et une précision suffisante dans la mesure de $N_{4\pi}$ les impulsions du compteur sont envoyées dans un préamplificateur à temps mort T qui élimine pratiquement

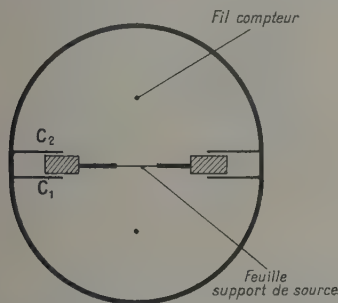


Fig. 2. — Coupe schématique du double compteur 2π . Le dispositif exact est décrit en détail par ailleurs [6].

tous les coups multiples. Avec $T = 5$ ms, la pente du compteur est inférieure à 0,5 pour 100 pour 100 V. Chaque mesure est affectée de la correction des pertes au moyen de la formule

$$N_{\text{réel}} = \frac{N_{\text{compté}}}{1 - T \times N_{\text{compté}}}$$

T est connu avec une précision de 1 pour 100.

Nous appelons A_1 et A_2 les écrans situés entre la source et chaque compteur. Le tableau II résume les résultats obtenus dans diverses conditions :

TABLEAU II (^{22}Na .)

A_1 ($\mu\text{g}/\text{cm}^2$).	A_2 ($\mu\text{g}/\text{cm}^2$).	$N_{4\pi}$ (c/m).
20 LC 600	0.....	$3e30 \pm 15$
20 »	} 0.....	$3e35 \pm 12$
+ 170 Al		
20 LC 600	170 Al.....	2910 ± 5

On voit qu'il y a émission par la source d'un rayonnement peu pénétrant, ne pouvant pas tra-

verser le support LC 600 de $20 \mu\text{g}/\text{cm}^2$ alors que les positons sont absorbés de façon négligeable par une feuille de $170 \mu\text{g}/\text{cm}^2$ d'aluminium.

La source étudiée émet 120 rayons très peu pénétrants dans un des compteurs 2π .

Lorsque nous déposons sur la source, par projection thermique dans le vide une couche d'aluminium de $20 \mu\text{g}/\text{cm}^2$, ce rayonnement est également totalement absorbé. Il est important de noter qu'il n'est pas associé au rayonnement β^+ . En effet, l'absorption d'un rayon émis simultanément avec un positon qui n'est pas absorbé n'affecte pas $N_{4\pi}$.

Il est normal d'attribuer le rayonnement très « mou » émis par le ^{22}Na , indépendamment des positons, aux électrons Auger qui suivent la capture électronique. Notons que les rayons γ de 1,28 MeV, ne jouent qu'un rôle peu important en raison de leur faible efficacité (< 1 pour 100). Nous les négligerons dans la suite de la discussion.

Nos résultats expérimentaux conduisent à :

$$\frac{P_e}{P_+} = \frac{1}{\lambda_K} \frac{120}{2910} = \frac{1}{\lambda_K} (4,1 \pm 0,05) \text{ pour } 100,$$

λ_K est la probabilité pour qu'une désintégration par capture électronique produise une impulsion dans le compteur 2π situé du côté de la source. Théoriquement, λ_K peut être supérieur à $\frac{1}{2}$, soit en raison de la rétrodiffusion des électrons Auger, soit en raison des électrons secondaires produits dans le support de source par les électrons qui y pénètrent. Étant donné que $\lambda_K < 1$, nous pouvons affirmer que :

$$\frac{P_e}{P_+} > (4,1 \pm 0,5) \text{ pour } 100.$$

Étude de la source. Mesure de λ_K . — Nous avons essayé de mesurer λ_K et de vérifier du même coup la qualité de la source utilisée.

Nous tirons profit du fait que l'énergie de liaison d'un électron L du cuivre (0,95 keV) est voisine de celle d'un électron K du néon (0,90 keV).

Nous préparons par la même méthode, sur un support d'aluminium de $170 \mu\text{g}/\text{cm}^2$, une source de ^{65}Zn de même étendue que celle de ^{22}Na et d'activité spécifique voisine. Le support d'aluminium peut être placé contre des écrans de béryllium et d'or. Le tableau III résume nos résultats.

Les couches d'aluminium de quelques microgrammes par centimètre carré sont déposées sur la source, par projection thermique dans le vide. Leur épaisseur est déterminée de deux façons :

1° On pèse la quantité d'aluminium qui a été évaporée et on admet que les atomes ont été projetés de façon isotrope;

2° On place le support de source, situé à 15 cm du filament sur une feuille d'aluminium de 100 cm^2 et l'on pèse avec une balance sensible au $1/100^{\text{e}}$ de

milligramme l'augmentation de poids de la feuille. On en déduit aisément la densité superficielle de la matière projetée sur la source.

Les résultats des deux méthodes concordent à 50 pour 100 près.

D'après le schéma de désintégration du ^{65}Zn ,

TABLEAU III (^{65}Zn .)

A_1	A_2	$N_1(\text{c/m})$	$N_2(\text{c/m})$	$(N_2/\text{c/m})$
170 $\mu\text{g/cm}^2$ Al + 40 mg/cm^2 Be	0.....	152	11 500	100 \pm 4
» »	3 $\mu\text{g/cm}^2$ Al.....	150	4 700	18 \pm 3
» »	7 » Al.....	150	4 220	13 \pm 2
» »	17 » Al.....	150	3 500	5,4 \pm 1
170 $\mu\text{g/cm}^2$ Al + 40 mg/cm^2 Au	0.....	25	11 500	18 \pm 2

actuellement bien déterminé (fig. 3), le compteur C_1 ne détecte pratiquement, à travers l'écran de beryllium, que les photons K du cuivre et les rayons γ d'énergie 1,114 MeV.

Si l'on fait varier l'épaisseur des écrans de beryllium à partir d'une épaisseur minimum de 20 mg/cm^2 ,

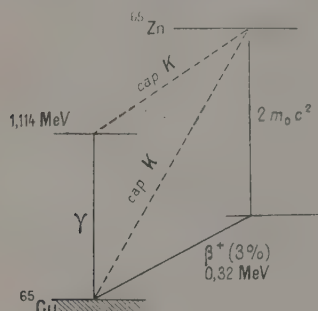


Fig. 3. — Schéma de désintégration du ^{65}Zn .

on constate que l'absorption du rayonnement, compte tenu de la géométrie particulière, a lieu suivant le coefficient d'absorption des photons K de 8 keV. Ceci montre que sur les 150 impulsions N_1 une fraction peu importante est produite par les rayons γ énergiques. On obtient une limite supérieure de celle-ci avec l'écran d'or de 40 mg/cm^2 . Celui-ci absorbe, en effet, totalement les photons K tandis que l'efficacité du compteur aux rayons γ est sans doute augmentée. Nous pouvons ainsi conclure qu'approximativement 127 photons K sont comptés dans C_1 et provoquent 82 coïncidences.

Un photon K est lié le plus souvent à une vacance dans la couche L . Soit λ_L la probabilité pour qu'une vacance dans la couche L provoque l'émission d'un rayonnement qui déclenche le compteur C_2 . On a

$$N_c = N_1 \times \lambda_L,$$

où N_c est le nombre de coïncidences entre C_1 et C_2 et N_1 le nombre de photons K comptés. Nos résultats expérimentaux nous permettent de conclure que $\lambda_L \sim 0,64$.

Or, les énergies de liaison des électrons K du néon et L du cuivre sont très voisines.

Dans les deux cas il y a émission, en majeure partie, après une vacance dans ces couches, d'électrons Auger d'énergies comparables.

Les sources ont été préparées par le même procédé et déposées sur l'aluminium.

L'activité spécifique du ^{65}Zn (3 mc/mg) est du même ordre que celle du ^{22}Na (1 mc/mg).

Si nous admettons que

$$\lambda_L(\text{zinc}) = \lambda_K(\text{sodium}),$$

ceci nous conduit à :

$$\frac{P_e}{P_+} = (6,5 \pm 0,9) \text{ pour } 100.$$

Discussion. — La chute très rapide du nombre des coïncidences, dans le cas du ^{65}Zn (tableau III), lorsque la source est couverte d'une couche de matière de quelques microgrammes par centimètre carré, prouve que la source est elle-même extrêmement mince et confirme la qualité de la méthode de préparation des sources minces uniformes par sublimation à l'air.

Nous avons, par le même procédé, recouvert la source de ^{22}Na , qui a servi aux mesures précédentes avec une nouvelle couche de ^{22}Na , trois fois plus intense. Aux erreurs statistiques près, nous observons le même nombre relatif de rayons de très basse énergie sortant de la source. Ceci montre que les électrons Auger ne subissent pas d'absorption notable dans la matière de la source.

Si nous confrontons notre résultat :

$$\frac{P_e}{P_+} = (6,5 \pm 0,9) \text{ pour } 100$$

avec celui de Miller et Sherr :

$$\frac{P_e}{P_+} = (11,0 \pm 0,6) \text{ pour } 100$$

et si nous admettons que la méthode de ces derniers ne comporte pas de cause d'erreur systématique supérieure à la précision statistique indiquée, nous voyons que nous commettons une assez grande

erreur dans l'estimation de λ_K . Tout se passe comme si l'épaisseur de la source était telle que les électrons secondaires produits dans l'aluminium et la matière de la source par les électrons Auger K , ainsi que les rayonnements liés au réarrangement de la couche L du néon ne pouvaient pas être détectés par le compteur 2π situé du côté de la source.

Notre méthode pourrait donc comporter une incertitude d'un facteur voisin de deux quant au nombre de désintégrations se produisant par capture électronique. Elle s'applique toutefois dans des cas où le schéma de désintégration ne permet pas l'emploi de la méthode des coïncidences utilisée par Miller et Sherr.

Elle peut permettre une recherche systématique des désintégrations par capture électronique dans les noyaux impairs-impairs légers pour lesquels une telle éventualité est possible, par exemple le ^{36}Cl . Elle ne nécessite que de très faibles activités, ce qui facilite la réalisation de sources très minces.

Influence de la méthode de préparation des sources. — Nous avons repris les expériences relatives à ^{22}Na avec des sources préparées par séchage d'une goutte. Nous observons 2,5 fois moins d'électrons Auger lorsque la source est déposée sur un

film de LC 600 aluminisé, et leur disparition totale lorsque la source est déposée sur une feuille d'aluminium battu de $170 \mu\text{g}/\text{cm}^2$. Ceci montre que lorsque l'on prépare des sources de ^{22}Na par l'évaporation d'une goutte, même si la solution contient une quantité infime de matière, l'auto-absorption peut jouer un rôle notable et conduire à des erreurs voisines de 5 pour 100 dans l'estimation de l'intensité absolue des sources au moyen de la technique du compteur 4π Geiger.

Cette erreur peut être également importante dans le cas d'émetteurs β peu énergiques comme ^{35}S et ^{14}C .

La méthode de sublimation à l'air que nous avons employée est aussi rapide que le séchage d'une goutte. Elle permet dans de nombreux cas d'éliminer ces difficultés tout en donnant d'excellents rendements.

Nous devons d'intéressantes discussions relatives à ce travail à MM. F. Suzor, P. Radvanyi et M^{me} Marty.

Nous remercions particulièrement M. Joliot d'avoir bien voulu suivre ce travail.

Manuscrit reçu le 12 avril 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOUCHEZ R. — *Physica*, 1952, **18**, 1171.
- [2] GOOD W. M., PEASLEE D. et DEUTSCH M. — *Phys. Rev.*, 1946, **69**, 313.
- [3] MAJOR J. K. — *Thèse*, Paris, 1951.
- [4] HORNYAK W. F. et COOR T. — *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 676.
- [5] MILLER R. H. et SHERR R. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1953, **28**, 4; *Phys. Rev.*, 1954, **93**, 1076.
- [6] CHARPAK G. et SUZOR F. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 1.
- [7] CHARPAK G. et CHEMLA M. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 490.

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

LA POLARISATION DE LA FLUORESCENCE DES MOLÉCULES GAZEUSES DIATOMIQUES

Par M^{lle} ÉLISABETH LAFFITTE,

Chargée de recherches au C.N.R.S.

Laboratoire de Physique générale, Faculté des Sciences, Bordeaux.

Sommaire. — I. INTRODUCTION. — Le spectre de résonance des molécules diatomiques.

II. LA POLARISATION DE LA FLUORESCENCE. — Les premiers résultats expérimentaux; Interprétation théorique; Comparaison avec l'expérience; Cas d'une excitation par de la lumière polarisée circulairement; la dépolarisation par chocs.

III. EXCITATION PAR L'ULTRAVIOLET. BANDES DE FLUCTUATIONS. — Cas de l'iode; Vapeur diatomique de mercure; Vapeur diatomique de zinc et de cadmium.

Le spectre de résonance des molécules diatomiques. — L'énergie d'une molécule diatomique [1] peut être représentée, avec une très bonne approximation, par une somme de trois termes : l'énergie électronique, l'énergie de vibration des noyaux le long de l'axe qui les joint (« axe nucléaire »), l'énergie de rotation de la molécule autour de son axe principal d'inertie (lequel est perpendiculaire à l'axe nucléaire).

On écrira

$$W = T + G + F;$$

nous supposons que dans cette expression, les différents termes sont exprimés en cm^{-1} .Les spectres de fluorescence correspondent à une variation de ces trois termes (1). La fréquence d'une raie (en cm^{-1}) sera

$$\begin{aligned} \nu &= T' - T'' + G' - G'' + F' - F'', \\ \nu &= \nu_e + G' - G'' + F' - F''. \end{aligned} \quad (1)$$

A chaque transition électronique, c'est-à-dire à chaque valeur de ν_e , correspond un système de bandes, dont la position approximative est déterminée par la valeur de ν_e qui est de l'ordre de $20\,000\text{ cm}^{-1}$ et correspond à une raie dans le visible ou l'ultraviolet.

On sait que les états électroniques sont caractérisés par le moment orbital résultant L et le spin résultant S des électrons. C'est la composante Λ de L suivant l'axe nucléaire qui est quantifiée : suivant que $\Lambda = 0, 1, 2, \dots$, on a les états $\Sigma, \Pi, \Delta, \dots$. On indique en haut et à gauche, la multiplicité de l'état

$$r = 2S + 1.$$

Le moment orbital et le spin qui caractérisent le

(1) Nous réservons les lettres sans accent pour caractériser l'état énergétique avant l'absorption, les lettres (') pour le niveau atteint par l'absorption, les lettres (") pour l'énergie après l'émission.

mouvement des électrons, sont couplés avec le moment angulaire de la rotation d'ensemble de la molécule, et la résultante est le moment angulaire total, quantifié avec le nombre quantique J . Le couplage peut se faire de plusieurs façons [2].

Tous ces moments sont exprimés en unités $\frac{h}{2\pi}$.L'énergie de rotation F dépend du moment angulaire total J . En première approximation :

$$F(J) = BJ(J+1).$$

Quant à l'énergie de vibration, elle dépend du nombre quantique de vibration v :

$$G(v) = \left(v + \frac{1}{2}\right) \omega_e - \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 x_e \omega_e + \dots,$$

le premier terme correspond à l'oscillateur harmonique, l'importance des termes correctifs va en diminuant; ω_e est la fréquence pour des amplitudes infiniment petites.

Le terme B , dans l'expression de l'énergie de rotation, qui vaut $\frac{h}{8\pi^2 I}$ (I , moment d'inertie de la molécule par rapport à son axe principal d'inertie, dépend de la distance entre les deux noyaux, donc de v). En première approximation :

$$B = B_e - a \left(v + \frac{1}{2}\right),$$

a est le « coefficient d'interaction » vibration-rotation. Les coefficients x_e , B_e et a sont caractéristiques d'un état électronique donné.

L'équation (1) décrit le spectre complet d'une molécule diatomique, compte tenu des règles de sélection.

tion. Rappelons les règles de sélection générales :

$$\Delta\Lambda = 0 \text{ ou } \pm 1,$$

$$\Delta S = 0 \text{ ou } \pm 1,$$

$$\Delta J = 0 \text{ ou } \pm 1,$$

avec $\Delta J = 0$ interdit pour $J = 0$ et pour une transition $\Sigma - \Sigma$.

Il n'y a pas de règle de sélection stricte pour le nombre quantique v . Chaque état de vibration de l'état électronique supérieur peut, en principe, se combiner avec chaque état de vibration de l'état inférieur. Les raies correspondant à une valeur constante de l'un des deux nombres v' et v'' caractérisant les états supérieur et inférieur, constituent une *progression*.

Si l'excitation n'est pas monochromatique, au moment de l'absorption, les molécules sont portées à différents niveaux v' de l'état excité, mais si la raie excitatrice est assez étroite, on peut atteindre un seul niveau v' et dans le spectre de fluorescence, on a la progression

$$v' = \text{const.}, \quad v'' = 0, 1, 2, \dots$$

L'expression (1) de la fréquence d'une raie peut s'écrire

$$\nu = \nu_e + \nu_v + B'J'(J'+1) - B''J''(J''+1).$$

Puisque $\Delta J = 0$ ou ± 1 , on a

$$J'' = J' \text{ ou } J'' = J' \pm 1;$$

ainsi chaque bande déterminée par la valeur de $\nu_e + \nu_v$ se divise en trois branches : branche P ($J'' = J' - 1$), branche Q ($J'' = J'$), branche R ($J'' = J' + 1$).

Quand la transition $\Delta J = 0$ est interdite, la branche Q est absente et le spectre de fluorescence se compose d'une série de doublets : c'est le cas par exemple de la fluorescence visible de l'iode.

Le taux de polarisation de la fluorescence. —

LES PREMIERS RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX. — Après la découverte des spectres de résonance de l'iode et du sodium, Wood [3] a montré que la lumière de fluorescence émise par ces vapeurs diatomiques était partiellement polarisée. Nous appellerons p le taux de polarisation que l'on observe, pour une excitation en lumière polarisée rectilignement, dans une direction perpendiculaire au vecteur lumineux et au faisceau excitateurs.

Les premières mesures ont donné pour p des valeurs assez faibles, variables avec les conditions expérimentales : elles ont permis de déduire certaines lois expérimentales, lois comportant d'ailleurs des exceptions.

En 1908, Wood a indiqué pour le taux de polarisation de la fluorescence émise par la vapeur de K_2 la valeur 0,28. Dunoyer [4], en 1912 a trouvé des valeurs supérieures, mais a montré que le *taux de polarisation diminue quand la concentration moléculaire de la vapeur augmente*, ce qui laisse supposer une dépolarisation par choc.

On a constaté aussi que p varie avec la longueur d'onde excitatrice.

Le spectre de fluorescence de la vapeur d'iode,

un des premiers étudiés, fait exception à ces deux règles : d'une part, p est indépendant de la concentration moléculaire de la vapeur (sauf en présence d'un gaz étranger); d'autre part, p est indépendant de la longueur d'onde excitatrice : il a la même valeur pour tous les membres d'une série de résonance. La valeur moyenne de p trouvée par différents auteurs est de l'ordre de 0,13.

INTERPRÉTATION THÉORIQUE. — La théorie classique ne rend pas compte des faits expérimentaux; nous allons exposer seulement les prévisions auxquelles conduisent la théorie quantique.

La mécanique quantique ne peut prévoir la valeur du taux de polarisation de la fluorescence en l'absence d'une force directrice externe, par exemple un champ magnétique. La théorie rattache le phénomène à l'effet Zeeman, mais elle doit également rendre compte de la polarisation de la lumière de fluorescence en l'absence de champ extérieur, en vertu du principe de la stabilité spectroscopique de Heisenberg [5] qui est le suivant : *la polarisation de la fluorescence reste la même en présence ou en l'absence d'un champ magnétique qui ne change pas la symétrie du système*. Pour une excitation par de la lumière polarisée linéairement, ce champ magnétique fictif sera parallèle au vecteur lumineux excitateur.

On sait que dans un champ magnétique il se produit, pour les molécules diatomiques, comme pour les atomes, une quantification spatiale. Le moment angulaire total J est animé d'un mouvement de précession autour du champ magnétique et ne peut prendre que certaines orientations. La composante m de J suivant le champ est le *nombre quantique magnétique*; m ne peut prendre que les $2J + 1$ valeurs $J, J - 1, \dots, -J$. Chaque niveau de rotation, qui est caractérisé par une valeur de J , se divise en $2J + 1$ *sous-niveaux Zeeman*, caractérisés chacun par une valeur de m .

Le nombre quantique magnétique obéit aux règles de sélection

$$\Delta m = 0 \text{ ou } \pm 1, \quad \text{avec } m = 0 \rightarrow m = 0$$

interdit pour $\Delta J = 0$. Pour une observation de l'émission dans une direction perpendiculaire au champ, les transitions $\Delta m = 0$ donnent des raies polarisées parallèlement au champ (ce sont les composantes π) et les transitions $\Delta m = \pm 1$ donnent des raies polarisées perpendiculairement au champ (composantes σ).

La polarisation de la fluorescence dépend du peulement relatif des niveaux Zeeman de l'état excité, lequel est déterminé par les conditions expérimentales et les probabilités de transition entre ces niveaux et les différents niveaux Zeeman de l'état fondamental.

Le nombre quantique J dépend de la nature du terme électronique et de la rotation nucléaire, mais il est indépendant de la vibration nucléaire : les effets Zeeman relatifs à toutes les bandes partielles d'un même système sont les mêmes et, par suite, le taux de polarisation a la même valeur pour tous les membres d'une série de résonance, ce qui est conforme aux résultats expérimentaux.

Les effets Zeeman dépendent du couplage de la molécule. Ces phénomènes de couplage [2] sont

complexes et connus dans les cas les plus simples seulement. Le cas presque exclusivement étudié par les auteurs et l'un des plus importants du point de vue expérimental est celui de la transition $^1\Sigma \rightarrow ^1\Pi$, pour une excitation par de la lumière polarisée linéairement et une observation à angle droit de la vibration et du faisceau excitateurs. Dans ces conditions, la direction de quantification fictive est parallèle au vecteur lumineux exciteur et les composantes π sont seules absorbées : c'est le cas d'« excitation π ». Mais la lumière émise contient à la fois des composantes π et des composantes σ , et le taux de polarisation a pour expression :

$$p = \frac{\Sigma I_{\pi} - \Sigma I_{\sigma}}{\Sigma I_{\pi} + \Sigma I_{\sigma}},$$

I_{π} et I_{σ} étant les intensités de la fluorescence parallèlement et perpendiculairement au vecteur lumineux exciteur.

Divers auteurs ont indiqué pour la transition $^1\Sigma \rightarrow ^1\Pi$ des formules donnant ces intensités I_{π} et I_{σ} . Voici les formules sous la forme que leur a donnée F. H. Crawford :

Branche P :

$$I_{\pi} = \frac{3(J''^2 - m^2)(J'' + 1)}{(2J'' - 1)(2J'' + 1)J''},$$

$$I_{\sigma\pm} = \frac{3(J'' \pm m)(J'' \pm m - 1)(J'' + m)}{4J''(2J'' - 1)(2J'' + 1)};$$

Branche Q :

$$I_{\pi} = \frac{3m^2}{J''(J'' + 1)},$$

$$I_{\sigma\pm} = \frac{3(J'' \pm m)(J'' \mp m + 1)}{4J''(J'' + 1)};$$

Branche R :

$$I_{\pi} = \frac{3[(J'' + 1)^2 - m^2]J''}{(J'' + 1)(2J'' + 1)(2J'' + 3)},$$

$$I_{\sigma\pm} = \frac{3(J'' \mp m + 1)(J'' \mp m + 2)J''}{(J'' + 1)(2J'' + 1)(2J'' + 3)}.$$

Les intensités I_{π} correspondent à $\Delta m = 0$; $I_{\sigma\pm}$ à $\Delta m = \pm 1$;

$$I_{\sigma} = I_{\sigma+} + I_{\sigma-}.$$

Rappelons que J'' est la valeur finale de J après l'émission; m représente également la valeur finale du nombre quantique magnétique.

A l'aide des formules précédentes, Crawford a construit le diagramme des raies Zeeman de la transition $^1\Sigma \rightarrow ^1\Pi$ (fig. 1) pour les premières valeurs de J'' ; la longueur des traits est proportionnelle à l'intensité des raies; les traits au-dessus de la ligne horizontale représentent les intensités I_{π} ; ceux au-dessous de la ligne horizontale représentent les intensités I_{σ} . Les distances entre les traits verticaux sont proportionnelles à la séparation des raies Zeeman. Ici cette séparation des raies donne directement la division Zeeman du niveau $^1\Pi$: en effet, pour le niveau $^1\Sigma$, $\Lambda = 0$ et $S = 0$, donc il n'y a pas de moment magnétique associé au moment orbital et au spin des électrons; il reste les moments magné-

tiques associés aux spins des noyaux et au mouvement de rotation de la molécule, moments qui sont tout à fait négligeables, et pratiquement le niveau $^1\Sigma$ est influençable magnétiquement.

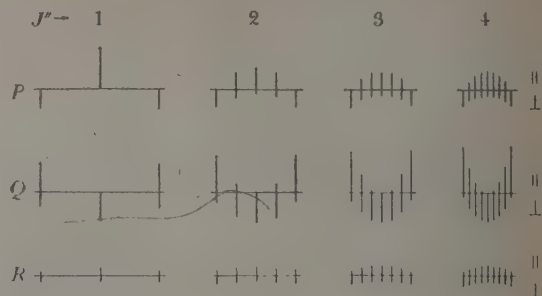


Fig. 1.

Des formules et du diagramme de Crawford, Mrozowski [7] a déduit la polarisation de la fluorescence pour tous les cas possibles provenant de la combinaison des deux processus d'émission et d'absorption. Pour une excitation par une branche Q, on a aussi émission d'une branche Q. Pour une excitation par une branche P ou R, on a à la fois émission d'une branche P et d'une branche R. D'où les cinq cas possibles : Q [Q], R [P], R [R], P [P] et P [R], la lettre entre crochets indiquant la branche excitatrice. La figure 2 reproduit les courbes de Mrozowski.

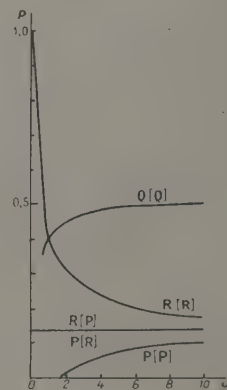


Fig. 2.

COMPARAISON AVEC L'EXPÉRIENCE. — Les courbes de Mrozowski expliquent bien les résultats expérimentaux. Les calculs ont été faits dans le cas d'une transition $^1\Sigma \rightarrow ^1\Pi$, mais Placzek a montré qu'ils étaient généralisables à d'autres transitions. On passerait par exemple au cas $^1\Pi \rightarrow ^1\Sigma$ en remplaçant dans les formules intermédiaires J'' par la valeur J' du nombre quantique J de l'état excité.

On remarque que lorsque J augmente, la valeur du taux de polarisation, pour la courbe Q [Q] tend rapidement vers 0,50 tandis que pour toutes les autres courbes, elle tend vers la valeur asymptotique

commune 14,3 pour 100; il y a donc une grande différence entre les séries de résonance simples et les séries de doublets et le taux de polarisation varie en général avec la longueur d'onde excitatrice. Mais on s'explique très bien que dans le cas de l'iode, par exemple, le taux de polarisation soit indépendant de la longueur d'onde excitatrice. En effet, le spectre de fluorescence visible de l'iode correspond à une transition $^1\Sigma \rightarrow ^1\Sigma$; pour ces transitions, il n'y a pas de branches Q, la transition $\Delta J = 0$ étant interdite; d'autre part, la valeur moyenne du quantum de rotation est assez élevée et J est voisin de 50 pour les raies observées : la valeur asymptotique commune (14,3 pour 100) est pratiquement atteinte. Des mesures de Mrozowski, pour une excitation par la raie verte du mercure, ont donné pour p la valeur 14,6 pour 100, en très bon accord avec les prévisions théoriques.

Wood et Dunoyer avaient trouvé pour les métaux alcalins des valeurs de p de l'ordre de 0,36; mais dans leurs expériences, l'excitation n'était pas monochromatique; comme, dans le cas des métaux alcalins, la fluorescence correspond à une transition $^1\Pi \rightarrow ^1\Sigma$, on a à la fois dans le spectre de résonance des séries simples et des séries de doublets. Mrozowski fait remarquer que la valeur trouvée est assez voisine d'une valeur moyenne théorique si l'on tient compte du fait que les branches Q ont une intensité environ deux fois plus grande que celle des branches P et R; dans ces conditions, cette moyenne théorique serait en effet :

$$\frac{(2 \times 50) + (2 \times 14)}{4} = 0,32.$$

En excitant deux spectres de résonance de Na, respectivement par les raies du cadmium 4 800 et 5 086 Å qui donnent, la première une série simple, la seconde une série de doublets, Pringsheim a trouvé 0,42 et 0,13 pour 100, valeurs très différentes, conformément aux courbes de Mrozowski.

Enfin, Mrozowski [8], en excitant, par la raie 4 358 Å, le spectre de résonance de Se₂ et Te₂ qui correspond à une transition $^3\Sigma \rightarrow ^3\Sigma$ et ne comporte pas de branche Q, trouve 14,4 et 14,2 pour 100 en très bon accord avec les prévisions théoriques.

CAS DE L'EXCITATION PAR DE LA LUMIÈRE CIRCULAIRE. — Nous venons de voir que dans le cas d'une excitation par de la lumière polarisée linéairement, les deux composantes d'un doublet de rotation ont le même taux de polarisation pour des valeurs élevées de J , ce qui est réalisé dans la pratique.

Dans le cas d'une excitation par de la lumière circulaire, en observant dans le prolongement du faisceau excitateur, Daure et Kastler [9] ont trouvé que les deux composantes du doublet avaient des états de polarisation différents. Ce résultat est en bon accord avec la théorie établie ultérieurement par Placzek [10].

Placzek a calculé les coefficients de renversement et a montré que les deux composantes des séries de doublets exécutent des oscillations circulaires opposées. Pour les grandes valeurs de J , le coefficient de renversement r de la raie du doublet qui correspond à $\Delta J = 0$ (raie principale) doit converger vers $\frac{1}{6}$; ce coefficient doit être égal à 6 pour la « raie satel-

lite » ($\Delta J = 2$); cette raie doit donc être polarisée circulairement en sens inverse de la radiation excitatrice.

Daure et Kastler ont observé le sens de la polarisation circulaire dans le cas de la fluorescence visible de la vapeur d'iode excitée par la raie verte du mercure. Leurs mesures ont porté sur le doublet d'ordre 1 : ils ont trouvé que la raie 5 526,55 Å ($J = 28$, $J' = 29$, $J'' = 28$, donc $\Delta J = 0$) est régulière (r très petit); au contraire, la raie satellite 5 528,10 Å ($J = 28$, $J' = 29$, $J'' = 30$, $\Delta J = 2$) est fortement inversée (r grand).

LA DÉPOLARISATION PAR CHOCS. — (Nous revenons au cas d'excitation par de la lumière polarisée rectilignement.) La théorie précédente concernait des vapeurs à faible pression (par exemple inférieure à 1 mm de mercure). Quand la pression de la vapeur augmente, ou lorsqu'on introduit un gaz étranger, les chocs entre molécules provoquent des modifications dans le spectre de résonance.

Dans les vapeurs monoatomiques, l'effet de choc peut : soit faire perdre à la molécule la totalité de son énergie d'excitation de telle sorte que cette molécule ne peut plus émettre de lumière de fluorescence : il s'agit alors d'un choc éteignant, soit transférer la molécule dans un état électronique voisin : il s'agit alors d'un choc de transfert.

Dans le cas des molécules diatomiques, on doit envisager de plus le transfert de la molécule dans un état de vibration ou de rotation voisin. Enfin le choc peut provoquer une dissociation de la molécule qui entraîne également l'extinction.

Ces effets sont d'autant plus importants que les chocs sont plus nombreux, c'est-à-dire que la pression de la vapeur ou du gaz perturbateur est elle-même plus grande.

Les chocs entraînent généralement comme modification du spectre de résonance : une variation d'intensité des raies existantes, l'apparition de nouvelles raies, ainsi qu'une diminution du taux de polarisation des raies primitives et de l'ensemble de la lumière de fluorescence dans chaque intervalle spectral que l'on peut étudier expérimentalement.

Les chocs de transfert n'affectent pas tous le taux de polarisation; ainsi les chocs qui changent seulement l'énergie d'oscillation (c'est-à-dire le nombre quantique de vibration v') ne peuvent provoquer de dépolarisation de la fluorescence, car la direction des axes de rotation n'est pas modifiée par le choc. Les peuplements des différents niveaux magnétiques restent inchangés, et puisque l'effet Zeeman est le même pour toutes les bandes partielles d'un même système, le taux de polarisation reste le même, bien que les raies émises soient différentes. Seuls modifient le taux de polarisation les chocs qui changent les directions des axes de rotation, donc J en grandeur ou en direction et, par conséquent, le peuplement des niveaux Zeeman.

Mrozowski [11] estime que, sous l'influence des chocs, l'extrémité du vecteur J de la molécule décrit une sorte de mouvement brownien à la surface d'une sphère de rayon $l\sqrt{N}$; l est la valeur absolue de la valeur moyenne pour chaque choc de l'impulsion de rotation (en unités $\frac{h}{2\pi}$); N le nombre de chocs de

transfert efficaces pendant la durée de vie de la molécule excitée; ce nombre est proportionnel à la durée de vie τ de la molécule excitée et à la pression p du gaz perturbateur.

Le taux de polarisation de toute une bande de fluorescence troublée par chocs peut se mettre, d'après Mrozowski, sous la forme :

$$p = p_0 f\left(\frac{l^2 N}{J^2}\right) \sim p_0 \frac{1 - \frac{l^2 N}{3J^2}}{1 + \frac{l^2 N}{3J^2}} \sim p_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{l^2 N}{J^2}}$$

p_0 est le taux de polarisation de toute la bande sans perturbation. f est une fonction qui tend asymptotiquement vers zéro quand la pression du gaz perturbateur augmente, si la durée de vie de la molécule excitée est une constante; ce cas ne pourra être réalisé qu'en l'absence de chocs éteignants (Mrozowski admet que les chocs de transfert ne peuvent en aucune façon influencer la durée de vie).

Lorsqu'il existe une action extinctrice (soit auto-extinctrice comme dans le cas de la vapeur d'iode, soit action extinctrice d'un gaz étranger), la durée de vie diminue quand la pression augmente, de telle sorte que N peut ne pas devenir infini. Supposons, en particulier, conformément aux constatations de Ramsauer et Eliaschewitsch [12] sur la vapeur d'iode, que l'action extinctrice soit uniforme dans tout le système de bandes et qu'elle obéisse à la formule de Stern-Volmer alors :

$$\tau = \frac{\tau_0}{1 + \alpha p},$$

où τ_0 désigne la durée de vie de la molécule excitée dans un état non perturbé; α est une constante proportionnelle à la probabilité du choc extincteur. La formule donnant le taux de polarisation devient :

$$p = p_0 f\left(\frac{l^2}{J^2} \frac{\beta p}{1 + \alpha p}\right) = \frac{p_0}{1 + \frac{2}{3} \frac{l^2}{J^2} \frac{\beta p}{1 + \alpha p}}$$

en posant

$$N = \frac{\beta p \tau}{\tau_0}$$

β est une constante proportionnelle à la probabilité du choc de transfert. Dans ce cas, quand la pression du gaz perturbateur augmente, p ne tend pas vers zéro mais vers

$$p_0 f\left(\frac{l^2}{J^2} \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{p_0}{1 + \frac{2}{3} \frac{l^2}{J^2} \frac{\beta}{\alpha}}$$

Les chocs entre molécules d'iode représentent un cas limite. On a vu en effet qu'une augmentation de pression de la vapeur ne provoquait pas de dépolarisation. Ceci est dû à une forte action autoextinctrice de la vapeur d'iode; les chocs entre molécules d'iode ont une action presque exclusivement extinctrice :

$$\beta \neq 0 \quad \text{et} \quad p \neq p_0 = \text{const.}$$

la valeur asymptotique est déjà atteinte aux faibles pressions.

Excitation par l'ultraviolet. Bandes de fluctuations. — CAS DE L'IODE. — On peut exciter la fluorescence de l'iode par absorption de lumière ultraviolette de courte longueur d'onde (inférieure à 2 000 Å); la molécule passe alors par absorption à un niveau élevé d'oscillation de l'état $1^2\Sigma_u^+$ et en retournant à l'état initial $1^2\Sigma_g^+$ (*) émet une série de résonance ultraviolette dont la polarisation ne semble pas avoir été étudiée expérimentalement. On observe en outre des bandes diffuses ou bandes de fluctuations; ces bandes ont été découvertes par Mc Lennan [13] et sont appelées bandes de Mc Lennan.

On interprète les bandes de Mc Lennan en admettant que les molécules émettent spontanément de la lumière infrarouge et passent ainsi à divers niveaux d'état Π , puis perdent leur énergie en traversant des courbes de potentiel de répulsion correspondant à des états non quantifiés. Ces bandes de Mc Lennan ont des longueurs d'onde comprises entre 2 000 et 2 500 Å; leur taux de polarisation est d'après Mrozowski [14] relativement important (sans autre précision), ce qui s'explique du point de vue théorique : en effet l'émission de lumière infrarouge peut se faire spontanément en l'absence de chocs et n'entraîne qu'une variation de 1 des nombres quantiques de rotation et magnétique. Lorsqu'on ajoute un gaz étranger, une émission par chocs s'ajoute à l'émission spontanée et l'on observe alors un taux de polarisation plus faible, qui est encore cependant de l'ordre de 7 pour 100 pour 10 mm d'hélium.

CAS DE LA VAPEUR DIATOMIQUE DE MERCURE. — La vapeur Hg_2 émet de la lumière de fluorescence, mais les différentes bandes, au lieu d'être excitées par la raie de résonance, sont excitées par de la lumière de longueur d'onde différente (c'est ainsi que les bandes 4 850 et 3 380 Å sont excitées par 3 200 Å; la bande 2 345 par 1850 Å, etc.). Certaines des bandes de fluorescence apparaissent aussi dans le spectre d'absorption de la vapeur irradiée.

Le spectre de fluorescence de la vapeur Hg_2 (d'après Mrozowski) est représenté sur la figure 3. On y trouve trois sortes de bandes : 1° des bandes étroites, e, f, g respectivement à 2 650, 2 540 et 2 345 Å; 2° de longues suites de fluctuations : bandes c et d à 2 900 et 2 780 Å, bande h ou de Steubing : 2 345-2 100 Å; 3° de larges bandes continues a et b à 4 850 et 3 380 Å qui ne s'observent qu'à des pressions et températures suffisamment élevées pour que l'énergie thermique des atomes permette la formation transitoire de molécules.

Sans entrer dans le détail de l'interprétation du spectre de fluorescence, disons qu'elle est essentiellement liée au caractère instable de la molécule diatomique normale, l'état normal étant caractérisé par une courbe de potentiel de répulsion, alors qu'au contraire les molécules provenant du couplage d'atomes excités peuvent être stables.

La polarisation des bandes de fluorescence du mer-

(*) Un état électronique est positif (+) ou négatif (—) suivant que la fonction propre électronique ψ_e ne change pas ou change de signe par réflexion sur un plan passant par les deux noyaux. Un état est pair (g) ou impair (u) suivant que ψ_e ne change pas ou change de signe par réflexion sur le centre de symétrie.

cure a été étudiée par Zielinski [15]; les résultats peuvent se résumer ainsi :

— Les bandes de fluorescence qui apparaissent aussi dans le spectre d'absorption de la vapeur irradiée sont en général partiellement polarisées : bandes *e* et *f*, bande de fluctuations *h*; le taux de polarisation mesuré est le même pour toutes ces bandes : 5,5 pour 100 pour une excitation en lumière naturelle, ce qui correspond à $p = 9,6$ pour 100 pour une excitation par de la lumière polarisée rectilignement. Ce taux de polarisation est indépendant de la pression de la vapeur dans de larges limites.

— Les bandes continues de fluorescence *a* et *b*, qui n'apparaissent pas dans l'absorption, sont dépolarisées. De même, les bandes de fluctuation *c* et *d*, dont une seule (*d*) apparaît dans le spectre d'absorption.

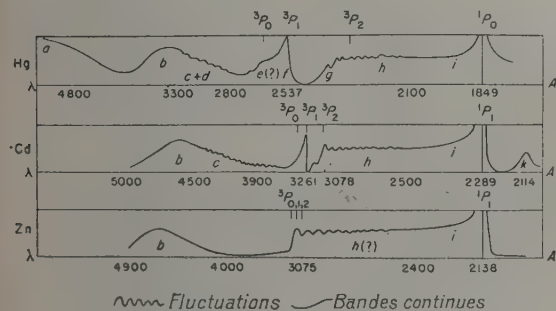


Fig. 3.

Mrozowski [7] est d'accord avec l'ensemble de ces résultats, mais d'après lui la bande *e* (2 650 Å) n'apparaît pas dans le spectre d'absorption et devrait être

dépolarisée : cette bande ne serait que le prolongement de la bande *f* ou de la bande de fluctuations *d*. Il estime également que l'identité de polarisation des bandes *f* et *h* est simplement due au hasard.

SPECTRE DES VAPEURS DIATOMIQUES DE CADMIUM ET DE ZINC. — Le spectre de fluorescence de ces vapeurs (d'après Mrozowski) est reproduit sur la figure 3 au-dessous de celui du mercure avec lequel il présente de grandes analogies; les courbes de potentiel de ces vapeurs métalliques sont tout à fait analogues à celles du mercure. Les bandes sont cependant moins marquées quand on passe du mercure au cadmium, puis au zinc.

Comme pour le mercure, les bandes de plus grande longueur d'onde (*b* et *c*) ne se trouvent pas dans le spectre d'absorption [16]. Les bandes de fluctuations *h* sont appelées bandes de Van der Lingen [17] pour le cadmium et de Kapuscinski [18] pour le zinc (dans le cas du zinc, la bande *h* est assez difficile à observer).

La similitude entre les trois vapeurs métalliques se poursuit en ce qui concerne la polarisation. Les bandes de plus grande longueur d'onde (ici bandes visibles *b* et *c*) sont toujours dépolarisées. Le taux de polarisation p de la bande *h* du cadmium, étudié par Sosnowski [19] et Mrozowski [20] est de l'ordre de 11 pour 100, donc très voisin de celui de la bande *h* du mercure; pour la bande *h* du zinc, p , mesuré par Okon [21] serait 14,5 pour 100 mais on estime que ce résultat ne peut être considéré comme certain, à cause des difficultés expérimentales. Comme dans le cas du mercure, ces taux de polarisation sont très peu influencés par une augmentation de la pression de la vapeur.

Manuscrit reçu le 23 juin 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] PRINGSHEIM P. — Fluorescence and Phosphorescence. Interscience Publishers, New York, p. 134.
- [2] HERZBERG G. — Molecular Spectra and Molecular Structure. Van Nostrand, New York, t. I, p. 218.
- [3] WOOD R. W. — *Phil. Mag.*, 1908, **16**, 184.
- [4] DUNOYER L. — *Le Radium*, 1912, **9**, 177 et 209.
- [5] HEISENBERG W. — *Z. Physik*, 1926, **31**, 617.
- [6] KRONIG R. DE L. — *Z. Physik*, 1925, **31**, 885.
- [7] MROZOWSKI S. — *Acta Phys. Polonica*, 1936, **5**, 85.
- [8] MROZOWSKI S. — *Acta Phys. Polonica*, 1938, **7**, 45.
- [9] DAURE P. et KASTLER A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1934, **198**, 557.
- [10] PLACZEK G. — *Rayleighstreuung und Ramaneffekt. Handbuch der Radiologie*, Bd VI, 1934, **2**, 371.
- [11] MROZOWSKI S. — *Bull. Intern. Cracovie*, 1933, p. 346.
- [12] RAMSAUER G. — *Z. Physik*, 1927, **40**, 675.
- [13] ELIASCHEWITSCH M. — *Physik Z. Sowjet*, 1932, **1**, 510.
- [14] MC LENNAN. — *Proc. Roy. Soc.*, 1913, **88**, 289; 1914, **91**, 23.
- [15] MROZOWSKI S. — *Acta Phys. Polonica*, 1933, **2**, 229.
- [16] ZIELINSKI G. — *Acta Phys. Polonica*, 1934, **3**, 517; *C. R. Acad. Sc.*, 1933, **197**, 1109; 1935, **200**, 1313.
- [17] KAPUSCINSKI W. et JABLONSKI A. — *Z. Physik*, 1929, **57**, 692.
- [18] VAN DER LINGEN J. S. — *Z. Physik*, 1921, **6**, 403.
- [19] KAPUSCINSKI W. — *Bull. Intern. Cracovie*, 1930, p. 453.
- [20] SOSNOWSKI L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1932, **195**, 224; *Acta Phys. Polonica*, 1932, **1**, 327.
- [21] MROZOWSKI S. — *Z. Physik*, 1934, **87**, 340.
- [22] OKON M. — *Acta Phys. Polonica*, 1935, **4**, 215.

LETTRES A LA RÉDACTION

VARIATIONS DE LA VITESSE DES ULTRASONS
DANS LE MÉTHANE EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE
ET DE LA PRESSION

Par A. LACAM,

Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

Exploitant les possibilités d'un nouvel appareillage qui permet de plus larges variations de températures, nous avons étendu jusqu'à 200° C, les précédents résultats relatifs au méthane [1], [2] sous pression.

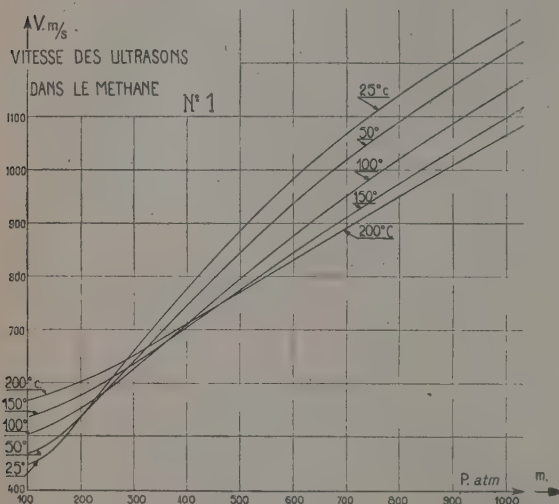


Fig. 1.

La méthode employée est la même que précédemment, elle est basée sur la diffraction de la lumière par faisceau ultrasonore. Les nouvelles mesures ont été effectuées aux températures de 100, 150 et 200° C, pour des pressions comprises entre 100 et 1000 atm. Dans notre publication précédente limitée aux températures de 25 et 50° C, nous avons noté que si le gaz se comporte normalement aux faibles pressions — vitesse augmentant avec la température — par contre, il n'en est pas de même aux pressions élevées. Ainsi pour la gamme de températures 25-200° C, la position initiale des isothermes se trouve inversée pour des pressions supérieures à 450 atm (fig. 1). Nous avons donc été conduit à introduire la densité ρ , déduite des relations P, V, T de Kvalnes et Gaddy [3], comme nouvelle abscisse. Les nouvelles courbes ainsi

obtenues forment un faisceau de paraboles (fig. 2) qui peuvent être convenablement représentées par un développement en série des puissances croissantes de la densité ρ , de la forme

$$V_{\rho}^T = A + B\rho + C\rho^2. \quad (1)$$

L'équation purement empirique ainsi obtenue satisfait cependant à la condition

$$A = V_{\rho=1}^{T=0^\circ\text{C}} \sqrt{1 + \alpha t}, \quad (2)$$

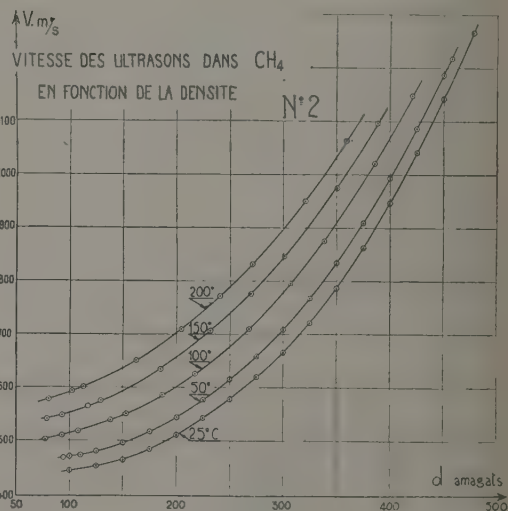


Fig. 2.

$V_{\rho=1}^{T=0^\circ\text{C}}$ étant la vitesse dans les conditions normales, $\alpha = \frac{1}{273}$.

Partant des données expérimentales, et adoptant les valeurs de A données par l'équation (2) nous avons déterminé B et C .

	A.	B.	C.
25°.....	449	-0,5543	0,00434
50°.....	468	-0,4857	0,00337
100°.....	503	-0,3750	0,00437
150°.....	535	-0,2600	0,00433
200°.....	566	-0,1743	0,00433

On remarque que C conserve une valeur sensiblement constante avec la température. Nous avons

retenu la valeur moyenne de 0,00435 pour les calculs. La divergence entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées n'excède, que très rarement 1 pour 100 de la valeur de la vitesse, ordre de grandeur de la précision des mesures.

Les mesures ont été effectuées avec un quartz piézoélectrique de 10 mm d'épaisseur vibrant suivant ses harmoniques. La fréquence était voisine de 3,2 MHz. Les températures étaient maintenues constantes à mieux que 0,1 près.

Des mesures de dispersion n'ont pas pu être effectuées, par ce que l'écart entre les franges devient difficilement mesurable à haute température pour des fréquences moins élevées.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1954.

[1] LACAM A. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 426-427.

[2] LACAM A. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 381-382.

[3] KVALNES et GADDY. — *J. Amer. Chem. Soc.*, 1931, **53**, 394.

REMARQUE SUR LA DISTRIBUTION ANGULAIRE DANS LA RÉACTION (n, p)

Par M. DEMEUR,

Institut Interuniversitaire des Sciences nucléaires (Belgique).

L'étude expérimentale des distributions angulaires dans les réactions (d, p), (d, n) a conduit à un nouveau développement de la théorie de ces réactions, sans formation d'un noyau intermédiaire. Le transfert de moment angulaire au cours de la réaction joue un rôle essentiel dans la prévision des distributions angulaires aux petits angles ($< 60^\circ$) [1]. Ce fait suggère l'extension à d'autres réactions de la théorie mise au point pour les réactions (d, p), (d, n). C'est ce que Huby et Newns [2] ont fait pour la diffusion inélastique (d, d'). Par une voie, à première vue différente, Austern, Butler et McManus [3] se sont intéressés à la réaction (n, p).

Le succès des approximations faites dans les travaux [1] et [2] donne à penser que leur application à la réaction (n, p) est légitime. La présence lettre montre que l'on retrouve ainsi la distribution angulaire obtenue par [3], et étend les résultats à des réactions du même type, telles que ($d, 2n$) et (^3H , ^3He).

On considère un noyau initial (ni) composé de ($A-1$) nucléons décrits par les variables ξ et du nucléon (d) qui va être « échangé » au cours de la réaction. Le noyau final (nf) est composé des mêmes ($A-1$) nucléons et du nucléon (c) arraché au noyau projectile. Le projectile initial (i) — qui peut n'être que le nucléon (c) — est composé de ($B-1$) nucléons décrits par les variables η et du nucléon (c); le projectile final (f) est composé des mêmes ($B-1$) nucléons et du nucléon (d). On supposera que les systèmes de référence attachés aux noyaux (nf) et (ni) coïncident (SL). Cette hypothèse est légitime quand

l'énergie cinétique du nucléon (c) est grande devant la différence des énergies de liaison de (d) dans (ni) et de (c) dans (nf).

L'élément de matrice est donné par :

$$I = \int \Psi_{nf}^*(\bar{r}_c, \sigma_c, \xi) \Phi_f^*(\bar{r}_d, \sigma_d, \eta) \\ \times e^{-ik_f \frac{\bar{r}_d + \bar{\eta}}{B}} H \Phi_i(\bar{r}_c, \sigma_c, \eta) \\ \times e^{ik_i \frac{\bar{r}_c + \bar{\eta}}{B}} \Psi_{ni}(\bar{r}_d, \sigma_d, \xi) d\bar{r}_c d\bar{r}_d d\eta d\xi,$$

où Φ_i et Φ_f sont les fonctions d'onde internes de (f) et (i);

$$\bar{\eta} = \sum_1^{B-1} \bar{r}_i$$

sont les coordonnées des ($B-1$) nucléons inertes de (f); H est le potentiel d'interaction que l'on supposera donné par

$$H = \delta(\bar{r}_c - \bar{r}_d) V(\bar{r}_c, \bar{r}_d, \sigma_c, \sigma_d, \xi).$$

En imposant à V la condition de ne donner une contribution appréciable que dans une mince couche de rayon moyen R , on obtient aisément

$$I = \int e^{-ik \frac{\bar{R} + \bar{\eta}}{B}} \Phi_f^*(\bar{R}, \sigma_d, \eta) \Phi_i(\bar{R}, \sigma_c, \eta) d\eta d\omega \\ \int \Psi_{nf}^*(\bar{r}, \sigma_c, \xi) V \Psi_{ni}(\bar{r}, \sigma_d, \xi) r^2 dr d\xi,$$

où

$$\bar{r}_c = \bar{r}_d = \bar{r} = (r, \omega), \\ \bar{R} = (R, \omega) \quad \text{et} \quad \bar{k} = k_f - k_i.$$

La dernière intégrale s'exprime en fonction de $Y_{lc}^{m_c}(\omega)$, $Y_{ld}^{m_d}(\omega)$ et des fonctions de spin X_{μ_c} et X_{μ_d} :

$$\int \Psi_{nf}^* V \Psi_{ni} r^2 dr d\xi \\ = f(\omega, \sigma_c, \sigma_d) = \sum_{m_c \mu_c}^{m_c \mu_c} A_{ld m_d \mu_d}^{lc m_c \mu_c} Y_{lc}^{m_c} Y_{ld}^{m_d} X_{\mu_c}^* X_{\mu_d}$$

A l'aide de la relation

$$Y_{lc}^{m_c}(\omega) Y_{ld}^{m_d}(\omega) \\ = \sum l m \left[\frac{2(l_c+1)(2l_d+1)}{4\pi(2l+1)} \right]^{\frac{1}{2}} C_{l_c l_d}(l, 0; 0, 0) \\ \times C_{l_c l_d}(l, m; -m_c, m_d) Y_l^m(\omega),$$

où la sommation sur l s'étend de $|l_c - l_d|$ à $(l_c + l_d)$, on a

$$f(\omega, \sigma_c, \sigma_d) = \sum_{m_c \mu_c}^{m_c \mu_c} A_{ld m_d \mu_d}^{lc m_c \mu_c} X_{\mu_c}^* X_{\mu_d} \sum l m \dots Y_l^m(\omega),$$

avec

$$A_{ld m_d \mu_d}^{lc m_c \mu_c} = \sum \mu'_n \xi m'_c m'_d C_{j_n \xi l_c}(j_{nf}, \mu_{nf}; \mu'_n \xi, m'_c) \\ \times C_{j_n \xi l_d}(j_{ni}, \mu_{ni}; \mu'_n \xi, m'_d) \alpha_{\mu_c \mu_d l_c l_d}^{m_c m_d m'_c m'_d}.$$

Dans cette expression, $j_n \xi$ et sa projection $\mu_n \xi$ est

attaché aux $(A-1)$ nucléons de coordonnées ξ . On obtient ainsi l'élément de matrice

$$I = \sum_{m_d \mu_d m_d' \mu_d'}^{m_c \mu_c m_c' \mu_c'} \dots \sum l m \dots \\ \times \int d\omega Y_l^m e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \int e^{-i\vec{k} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{r}_i - \vec{R})} \Phi_f^* \Phi_i d\tau_i,$$

où la dernière intégrale est le facteur de forme que nous appellerons $G(k)$ et qui se présente sous la forme d'une transformée de Fourier, étant donné que le mouvement de (i) et (f) a été décrit par des ondes planes. L'avant-dernière intégrale se réduit à :

$$C_l^{m'} = \delta_{m,0} i^l \left| \frac{1}{2} (1 + i) \right|^2 \left(\frac{\pi}{2kR} \right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kR).$$

L'expression $|I|^2$ doit être sommée pour tous les états possibles des particules finales (μ_{nf}, m_d, μ_d) et la moyenne doit être faite sur tous les états possibles des particules initiales (μ_{ni}, m_c, μ_c) . Les propriétés d'orthogonalité des coefficients de Clebsch-Gordan permettant de ramener $\sigma \propto \sum_{\mu_{ni} \mu_{nf}} |I|^2$ à

$$\sigma \propto \frac{G^2(k)}{(2j_{ni}+1)} \frac{2l_d+1}{4\pi} \sum_l \Lambda_l C_{l,l_d}^2(l, 0; 0, 0) C_l^{0,2}. \quad (4)$$

où

$$\Lambda_l = \frac{2j_{nf}+1}{2l+1} \sum_{\mu_c m_d' \mu_{nf}'}^{m_c m_d' m_{nf}'} \left(\mathcal{C}_{\mu_c \mu_d' \mu_{nf}'}^{00 m_d' m_{nf}'} \right)^2.$$

Dans le cas d'une réaction (n, p) , on a $B=1$ et $G(k)=1$. Avec les notations utilisées ici, la formule (10) de [3] s'écrit

$$\sigma \propto (2l_d+1) \sum_l l C_{l,l_d}^2(l, 0; 0, 0) C_l^{0,2}$$

qui est identique à (1) lorsque tous les Λ_l sont égaux. L'« impulse approximation » utilisée par ces auteurs a pour effet de ramener les différents éléments de matrice partiels à une valeur moyenne commune.

Les valeurs possibles de l sont données par

$$j_{ni} + j_{nf} + 1 \geq l \geq \min \left| \pm j_{ni} \pm j_{nf} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right|, \quad (2)$$

condition qui se ramène à

$$j_{ni} + j_{nf} + 1 \geq l \geq \min |j_{ni} - j_{nf}| + 1$$

dans le cas de la réaction (n, p) car j_{ni} et j_{nf} ne peuvent être alors simultanément nuls. La relation (2) n'est autre que la règle de sélection de la diffusion inélastique, ce à quoi il fallait s'attendre puisque (1) s'applique aux réactions (n, n') et (p, p') si les forces coulombiennes sont négligeables.

L'hypothèse selon laquelle les systèmes de référence attachés à (ni) et (nf) coïncident, entraîne $k_i \approx k_f$, d'où

$$k = |\vec{k}_i - \vec{k}_f| \approx 2k_i \sin \frac{\theta}{2},$$

où θ est l'angle (k_i, k_f) . Cette approximation permet

de voir aisément comment varie le facteur $G(k)$ dans les réactions plus compliquées que (n, p) où l'on a $B > 1$. Dans le cas de telles réactions, les maxima des fonctions de Bessel seront masqués par le facteur de forme.

Manuscrit reçu le 26 octobre 1954.

- [1] BHATIA A. B., KUN HUANG, HUBY R. et NEWNS H. C. — *Phil. Mag.*, 1952, **43**, 485.
- [2] HUBY R. et NEWNS H. C. — *Phil. Mag.*, 1951, **42**, 1442.
- [3] AUSTERN N., BUTLER S. T. et McMANUS H. — *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 350.

UN VOLTMÈTRE A TRIODE INVERSÉE POUR LA MESURE DES TENSIONS NÉGATIVES

Par R. GÉNIN,

Laboratoire des Rayons X, Paris.

Il est fréquent, surtout pour les tensions supérieures à quelques centaines de volts, qu'on ait à mesurer la tension aux bornes d'une source ne pouvant débiter qu'un très faible courant, et l'appareil de mesure perturbe alors la tension délivrée par la source. Pour réduire la consommation de l'appareil de mesure, on est conduit à utiliser un galvanomètre sensible en série avec une résistance de très forte valeur, mais, au moins pour les appareils courants, on dépasse rarement une résistance de 20 000 Ω/V . Une autre solution consiste à utiliser une triode inversée qui fonctionne d'ailleurs, pour autant qu'on puisse appliquer la théorie élémentaire des triodes, comme un diviseur de tension à capacités. En effet, dans une triode inversée à courant grille constant, on a entre la tension anodique V_a et la tension grille V_g la relation

$$-\frac{\Delta V_g}{\Delta V_a} = k,$$

où k est le coefficient d'amplification, donné par le rapport de la capacité anode-cathode à la capacité grille-cathode

$$k = \frac{C_{ak}}{C_{gk}} < 1$$

pour une triode inversée, donc

$$\Delta V_g = -\Delta V_a \frac{C_{ak}}{C_{gk}}.$$

De plus, le rapport de réduction

$$\frac{1}{k} = \frac{C_{gk}}{C_{ak}}$$

est égal, en gros, au coefficient d'amplification de la triode employée dans les conditions normales, ce coefficient peut être supérieur à 1000 dans les pentodes.

Plusieurs montages utilisant une triode inversée pour la mesure des tensions négatives ont été décrits [1], [2], [3], [4]; en particulier, dans le montage de Yuan, la cathode de la triode inversée est à la masse et la

mesure consiste, quand on applique sur l'anode une tension négative $-V_a$, à déterminer à quel potentiel positif V_k il faut porter la grille pour amener le courant grille à une valeur donnée. La tension V_a est une fonction linéaire du potentiel de grille V_k , qui est déterminé d'ailleurs indirectement par une méthode de zéro.

Le montage que nous proposons opère aussi à

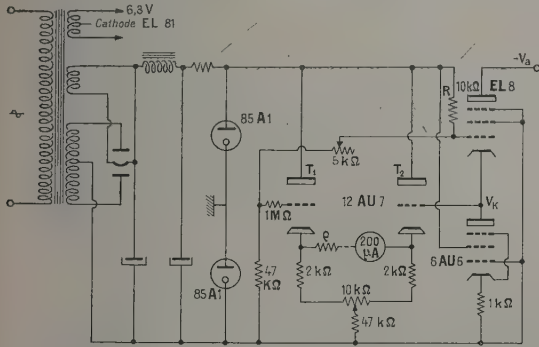


Fig. 1.

courant grille constant, mais la méthode de zéro est remplacée par une lecture directe sur le cadran d'un milliampèremètre. On perd ainsi en précision, mais la commodité d'emploi est accrue.

En outre, nous avons cherché à utiliser, pour la triode inversée, au lieu des tubes d'émission habituellement employés, des tubes de réception courants. Pour les tensions inférieures à 3 kV, les tubes employés pour le balayage des lignes en télévision conviennent. Pour la pentode EL 38, en fixant le courant grille à 5 mA, on trouve $\frac{1}{k} = 1500$ en prenant comme

grille la réunion des électrodes G_1 , G_2 , G_3 , et $\frac{1}{k} = 1700$ en utilisant seulement G_1 comme grille, mais en portant les électrodes G_2 et G_3 à -100 V par rapport à la cathode. Pour la pentode EL 81/6 CJ 6 avec le même courant grille de 5 mA, et, dans ces dernières conditions, le coefficient $\frac{1}{k}$ est un peu plus faible, mais en revanche l'isolement de l'anode est meilleur que dans l'EL 38.

Le principe utilisé est le suivant : les potentiels de la grille et de l'écran de la pentode 6AU6 étant fixés par rapport au potentiel de la cathode, le courant anodique, qui est aussi le courant grille de la triode inversée EL 81, est constant. Quand on applique une tension négative $-V_a$ sur l'anode de la triode, le courant grille ne pouvant diminuer, la différence de potentiel grille-cathode croît, c'est-à-dire que le potentiel V_k de la cathode diminue puisque le potentiel de la grille du tube EL 81 est fixé à partir du moment où le courant qui traverse la résistance R est constant. La mesure de V_a est ainsi ramenée à la mesure du potentiel de la cathode; pour éviter de perturber le courant grille, il faut effectuer cette mesure avec un appareil à faible consommation, c'est pourquoi on a utilisé le dispositif classique du voltmètre élec-

tronique constitué par deux triodes à charge cathodique. La cathode de la triode inversée est reliée à la grille d'une des triodes T_1 et l'application d'une tension $-V_a$ provoque l'apparition d'un courant entre les cathodes, qui est une fonction linéaire de la tension appliquée V_a . Quand $V_a = 0$, on équilibre la double triode en ajustant le potentiel de la grille de la triode T_2 . La méthode indiquée sur le schéma procure une bonne stabilité, car les variations accidentelles du potentiel de la grille de la triode inversée, qui sont transmises à la grille de T_1 , sont aussi appliquées presque intégralement à la grille de la triode T_2 dans un rapport $> \frac{47}{52} = 0,9$.

Le potentiel de la cathode du tube EL 81 est légèrement positif par rapport à la masse et ainsi même pour $V_a = 0$, l'anode est déjà négative par rapport à la cathode, ce qui évite l'apparition d'un courant anodique.

La résistance ρ en série avec le microampèremètre permet d'étalonner l'appareil en volts et, d'autre part, par commutation de cette résistance, on peut prévoir plusieurs gammes de mesure.

Les courbes de la figure 2 donnent la consommation du voltmètre en fonction de la tension appliquée. Cette consommation croît très vite avec la tension,

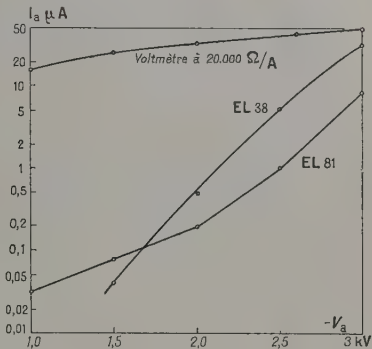


Fig. 2.

ce qui limite l'emploi de l'appareil aux tensions inférieures à 3 kV, surtout si la triode inversée utilisée est un tube EL 38.

Manuscrit reçu le 28 octobre 1954.

- [1] KUPFERBERG M. — *Rev. Sc. Inst.*, 1943, **14**, 254.
- [2] SCHNEEBERGER R. J. — *Rev. Sc. Inst.*, 1948, **19**, 40.
- [3] YUAN LUKE C. L. — *Rev. Sc. Inst.*, 1948, **19**, 450.
- [4] ROGOZINSKI A. et WEILL J. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 28 A.

NOTES SUR LA THÉORIE DU COUPLAGE INTERMÉDIAIRE

Par M. Maurice JEAN,
Laboratoire Curie, Institut du Radium, Paris.

Dans une précédente lettre [1], nous avons considéré l'extension de l'approximation de Tomonaga au cas

du méson pseudoscalaire neutre en théorie non relativiste (couplage $\sigma \cdot \nabla$). Nous présentons ici un autre traitement plus commodément applicable quand le moment angulaire du système nucléon nu + nuage est supérieur à $1/2$. Les notations sont celles de (A). L'hamiltonien (A.3) peut se récrire sous la forme réduite :

$$H_r = \Omega^{-1} H = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 - 3) + \frac{1}{2} \sigma \cdot \mathbf{q} \quad (1)$$

lorsqu'on fait le changement de variables

$$\mathbf{q} \rightarrow \Omega^{-\frac{1}{2}} \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \Omega^{-\frac{1}{2}} \mathbf{p},$$

que l'on pose

$$v = 2V\Omega^{-\frac{1}{2}}$$

et que l'on soustrait l'énergie du vide (terme $-\frac{3}{2}$).

Si l'on choisit maintenant des coordonnées polaires telles que :

$$q_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad q_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad q_3 = r \cos \theta, \quad (2)$$

l'équation aux valeurs propres $\varepsilon \Psi = H_r \Psi$ devient

$$\left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 - (2\varepsilon + 3) + \sigma \cdot \mathbf{q} \right\} \Psi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (3)$$

où \mathbf{L} est l'opérateur moment orbital du nuage. Le moment angulaire total du système est

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \sigma$$

et à cause du terme d'interaction ($\sigma \cdot \mathbf{q}$) la fonction d'ondes correspondant aux valeurs propres $j(j+1)$ et m de \mathbf{J}^2 et J^3 est de la forme

$$\Psi_m^j = \sum_l f_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad \left(l = j - \frac{1}{2} \text{ et } j + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

avec

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_{l, \frac{1}{2}} \left(j, m; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) Y_{l-1}^{m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) + C_{l, \frac{3}{2}} \left(j, m; m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) Y_{l+1}^{m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi), \quad (5)$$

où les $C_{l, \frac{1}{2}}$ (j, m, m_1, m_2) sont les coefficients de Clebsch Gordan, Y_l^m les fonctions propres du spin du nucléon nu et les Y_l^m les harmoniques sphériques. Dans ces conditions, l'équation (3) conduit à un système de deux équations radiales couplées

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j - \frac{1}{2} \right) - r^2 + \lambda \right) f_{j-\frac{1}{2}}(r) \\ & \quad + r f_{j+\frac{1}{2}}(r) = 0, \\ & \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(j + \frac{3}{2} \right) \left(j - \frac{1}{2} \right) - r^2 + \lambda \right) f_{j+\frac{1}{2}}(r) \\ & \quad - r f_{j-\frac{1}{2}}(r) = 0, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

où l'on a posé $\lambda = 2\varepsilon + 3$. On reconnaît, entre crochets, les hamiltoniens de l'oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions de moment angulaire

$$l = j - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad l = j + \frac{1}{2}.$$

Ce sont les hamiltoniens non perturbés de notre problème. Les valeurs propres correspondantes sont

$$\lambda^0 = 2v + l + 3 = v + 3 \quad (N \text{ entier positif ou nul})$$

et les fonctions d'ondes $f_{2v}(r)$ s'expriment à l'aide des polynômes de Laguerre [2]. Notre traitement consiste à développer les fonctions $f_l(r)$ suivant [3]

$$f_l(r) = \sum_v (-1)^v C_{2v+l}^l f_{2v}^l(r) \quad (v = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons ultérieurement

$$C_{2v+l}^l \rightarrow C_{2v}^l \quad \text{et} \quad C_{2v+l+1}^l \rightarrow C_{2v+1}^l.$$

On déduit alors de (6) le système d'équations linéaires homogènes :

$$\left\{ \begin{aligned} & C_{2v}^l \left(\varepsilon - 2v - j + \frac{1}{2} \right) \\ & - b \left\{ \sqrt{2v} C_{2v-1}^l + \sqrt{2v+2j+2} C_{2v+1}^l \right\} = 0, \\ & C_{2v+1}^l \left(\varepsilon - 2v - j - \frac{1}{2} \right) \\ & - b \left\{ \sqrt{2v+2j+2} C_{2v}^l + \sqrt{2v+2} C_{2v+2}^l \right\} = 0, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

où, comme en (A),

$$b = \frac{r}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} V \Omega^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce système d'équations peut être résolu numériquement quand on se donne b et j . Pour $j = \frac{1}{2}$, il se réduit à celui qu'on déduit de (A.7) et (A.5) à l'aide de (A.6). On peut comme en (A) utiliser une méthode variationnelle en minimisant l'énergie :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= j - \frac{1}{2} + \sum_v 2v C_{2v}^j + (2v+1) C_{2v+1}^j \\ &+ b \left\{ \sqrt{2v+2j+2} C_{2v-1}^j C_{2v}^j + \sqrt{2v+2} C_{2v+2}^j C_{2v+1}^j \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

On obtient encore des fonctions d'essai convenables en posant

$$C_m = e^{-\frac{\beta^2}{2}} \frac{\beta^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}}.$$

En remplaçant $\sqrt{\frac{2v+2j+2}{2v+1}}$ par l'expression

approchée $\frac{j + \frac{1}{2}}{2v+1} = \frac{\alpha j}{(2v+1)(2v+2)}$ on peut encore

écrire ε sous une forme analytique commodément maniable [cf. (A.9)]

$$\varepsilon = j - \frac{1}{2} + \beta^2 + 2b\beta + \frac{2b}{\beta} \left\{ \left(j + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sh} \beta^2 - \frac{\alpha_j}{\beta^2} (\operatorname{ch} \beta^2 - 1) \right\} e^{-\beta^2}, \quad (10)$$

avec

$$\alpha_j = 2 \left(j + \frac{3}{2} - \sqrt{2(j+1)} \right) \quad [4].$$

L'énergie ε est alors facilement minimisée pour différentes valeurs de b (E).

Le cas limite du couplage faible ($b \ll 1$) se traite aisément à partir des équations (8) en limitant le développement des fonctions (7) à leur premier terme (seulement C'_0 et $C'_1 = 0$). On obtient

$$\varepsilon = j - \frac{1}{2} - 2b^2(j+1).$$

Le cas limite du couplage fort ($b \gg 1$) s'étudie plus facilement à partir des équations (6) en utilisant l'analogie avec le traitement des molécules soulignée par Tomonaga [6]. On obtient

$$\varepsilon = -b^2 - 1 + \frac{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2}{4b^2}.$$

Enfin, on vérifie que la méthode variationnelle, avec l'expression (10) pour l'énergie conduit bien aux limites convenables dans les cas extrêmes ci-dessus.

Manuscrit reçu le 29 octobre 1954.

- [1] JEAN M. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 694, désigné par (A) dans le texte.
- [2] Cf. SHAFFER W. H. — *Rev. Mod. Physics*, 1944, **16**, 245, qui donne aussi les éléments de matrice nécessaires pour les calculs ultérieurs.
- [3] Le facteur $(-1)^v$ a été simplement introduit pour faciliter la comparaison avec (A).
- [4] Cette valeur a été choisie de façon à donner la limite correcte dans le cas de couplage faible. En le modifiant légèrement, il est possible d'obtenir la limite exacte pour le terme en b^2 dans le cas du couplage fort.
- [5] Les résultats sous forme de courbes analogues aux figures 1 et 2 de (A), seront donnés ultérieurement dans une publication plus détaillée.
- [6] TOMONAGA S. I. — *Progr. Theor. Phys.*, 1946, **1**, 109.

Errata. — Dans la lettre précédente [1] l'équation (9) a été transcrite d'une manière inexacte : un terme $2b\beta$ a été omis. L'expression correcte est ainsi :

$$\varepsilon = \beta^2 + 2b\beta + 2 \frac{b}{\beta} e^{-\beta^2} \left\{ \operatorname{sh} \beta^2 - \frac{0,536}{\beta^2} (\operatorname{ch} \beta^2 - 1) \right\}.$$

MOUVEMENT DES ÉLECTRONS DE CONDUCTIBILITÉ EN LUMINESCENCE CRISTALLINE

Par Daniel CURIE,

Laboratoire de Luminescence.
Faculté des Sciences, Paris.

1. A la suite des récents Congrès, il me paraît nécessaire d'abandonner les expressions « mécanisme monomoléculaire » ou « bimoléculaire » en phosphorescence. Leur emploi, qui ne se justifiait que par commodité, conduit maintenant à des discussions sur le degré (1 ou 2) d'équations forcément simplistes, posées *a priori*, et masque la réalité des phénomènes qui est beaucoup plus complexe.

2. Nous devons envisager le mouvement d'un électron issu d'un centre ou piège, et situé dans la bande de conductibilité. Dans le ZnS(Cu), les pièges responsables de la phosphorescence durable apparaissent avec le luminogène, et l'on peut les considérer comme situés au voisinage de celui-ci. Si l'électron issu d'un centre tombait toujours dans le piège voisin et réciproquement, de manière qu'il rentre toujours dans le centre de départ, on aurait une cinétique de degré 1 (« monomoléculaire »). S'il retombait, avec la même probabilité, dans de nombreux centres, on aurait une cinétique de degré 2 (« bimoléculaire »). En réalité, certains des électrons issus des centres parcourent une région du cristal renfermant de nombreux pièges et centres; d'autres sont renvoyés en arrière par les défauts du réseau et retombent, soit dans le centre initial, soit dans le piège voisin plus souvent que dans tout autre piège; inversement l'électron libéré de ce piège retombera dans le centre voisin plutôt que dans tout autre centre.

Hors les deux cas extrêmes ci-dessus, il convient de parler, non de cinétique d'ordre 1 ou 2, mais d'électrons qui se déplacent « peu » ou « beaucoup » dans le cristal (moins ou plus de 10^{-6} cm).

3. La proportion d'électrons arrêtés par les défauts est d'autant plus grande que les électrons sont plus lents.

Les électrons issus des pièges par voie thermique sont très lents (énergies de l'ordre de kT) et se déplacent « peu » : lors du déclin de la phosphorescence et en thermoluminescence, on est presque dans le cas extrême où l'approximation « monomoléculaire » est bonne [1].

Les électrons issus des pièges par voie optique (stimulation infrarouge) sont plus énergiques et se déplaceront souvent plus : le phénomène de « recapture » est plus important. Cependant l'étude de la diffusion thermique des électrons [2] nous avait fait conclure que la proportion d'électrons se déplaçant « beaucoup » reste faible, l'énergie initiale d'un électron se dissipant par diffusions thermiques avant qu'il ait pu parcourir plus de 10^{-6} cm.

4. Ceci semble confirmé par une expérience de Kallmann et Kramer [3]. Ils ont étudié l'effet de l'infrarouge sur la photoconductibilité σ et la luminescence I de divers ZnS et CdS. On applique l'infrarouge pendant l'excitation constante, parvenue à l'équilibre. L'infrarouge provoque deux effets de

sens contraires : il vide les pièges dans la bande de conductibilité (stimulation) ; d'autre part il provoque des retours sans émission (effet d'extinction) de la bande de conductibilité vers la bande de valence ou les centres poisons. Le premier de ces effets tend à augmenter le nombre d'électrons de conductibilité, donc σ et I ; le second à les diminuer.

Le résultat de Kallmann et Kramer est : sur I l'effet de stimulation est considérable et l'effet d'extinction faible ; sur σ c'est l'inverse.

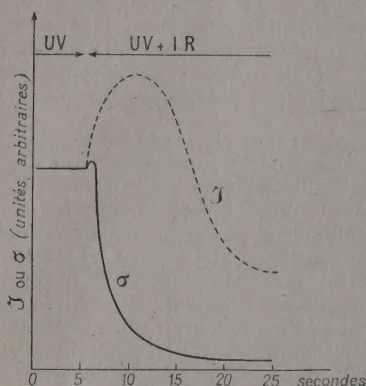


Fig. — Effet sur la luminescence et la photoconductivité d'une irradiation infrarouge agissant pendant l'excitation (Kallmann et Kramer).

Ceci s'explique si l'on admet, comme plus haut, qu'un grand nombre d'électrons de la bande de conductibilité ne vont que du centre dans le piège voisin ou inversement, contribuant à la luminescence mais non à la photoconductivité. Ainsi la plupart des électrons stimulés contribuent à I , mais non à σ : d'où l'effet de stimulation plus fort sur I . Les électrons qui prennent part au courant subissent de grands déplacements et peuvent rencontrer un centre poison ou un trou (libéré par l'infrarouge) de la bande de valence, événement rare pour ceux qui vont simplement du piège dans le centre voisin ; d'où l'effet d'extinction plus fort sur σ .

Manuscrit reçu le 29 octobre 1954.

- [1] CURIE D. — Thèse, Paris, 1951 ; *Ann. Phys.*, 1952, **7**, 799 ; *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 928.
 [2] CURIE D. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 514.
 [3] KALLMANN H. et KRAMER B. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 98.

SUR QUELQUES MODES D'UTILISATION DES CAVITÉS RÉSONNANTES EN RÉSONANCE PARAMAGNÉTIQUE

Par Jean UEBERSFELD,

École de Physique et Chimie, Laboratoire de M. Lucas.

On sait [1] que dans les expériences de résonance paramagnétique aux hyperfréquences la substance

paramagnétique soumise à un champ magnétique continu est placée dans une cavité résonnante en un ventre de champ magnétique. La cavité est couplée à un guide et l'on étudie les variations de la puissance réfléchie par la cavité lors de la résonance paramagnétique.

Nous nous proposons de préciser certaines conditions de détection du signal et de couplage de la cavité au guide.

Le schéma équivalent à une cavité couplée à un guide est un circuit résonnant série (R, L, C) fermant par l'intermédiaire d'un transformateur idéal (de rapport n) une ligne d'impédance caractéristique Z_0 . Nous supposons cette ligne fermée à l'autre extrémité sur son impédance caractéristique.

Soit $j\omega L_c$ l'inductance de la cavité en l'absence de résonance paramagnétique. La résonance paramagnétique introduit une inductance supplémentaire $4\pi j\omega L_s \chi$, χ étant la susceptibilité magnétique complexe

$$\chi = \chi' - j\chi''$$

de la substance.

Si ω_0 est la fréquence de résonance de la cavité, Q_0 le coefficient de surtension en l'absence de résonance paramagnétique ($Q_0 = \frac{\omega_0 L_c}{R}$) l'impédance de la cavité pour une fréquence $\omega = \omega_0 (1 + y)$ s'écrit en remarquant que χ et y sont petits

$$Z = R(1 + 2jQ_0 y) + 4\pi j\omega L_s \chi.$$

L'impédance de la cavité ramenée dans le plan

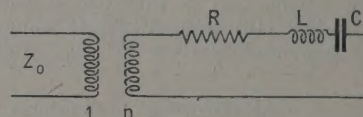


Fig. 1.

terminal de la ligne est alors $\frac{Z^*}{n^2}$ et le coefficient de réflexion Γ dans la ligne

$$\Gamma = \frac{Z^* - n^2 Z_0}{Z^* + n^2 Z_0}.$$

On désigne par a^* le complexe conjugué de a .

Si l'on tient compte de ce que χ est petit et si l'on introduit deux coefficients caractéristiques $K = \frac{4\pi\omega_0 L_s}{R}$

(coefficient de remplissage) et $\alpha = n^2 \frac{Z_0}{R}$ (coefficient de couplage), on obtient

$$\Gamma = \Gamma_y + \eta \chi^*, \quad (1)$$

avec

$$\Gamma_y = \frac{1 - \alpha - 2jQ_0 y}{1 + \alpha - 2jQ_0 y} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{-2j\alpha K}{(1 + \alpha - 2jQ_0 y)^2}.$$

Détection quadratique du signal réfléchi par la cavité. — χ est modulé en basse fréquence (par un champ magnétique alternatif). La puissance réfléchie détectée est la somme d'une puissance continue

provenant de Γ_y et d'une puissance de basse fréquence provenant de χ'' .

Si la puissance incidente est constante, la puissance réfléchie est proportionnelle à $\Gamma\Gamma^*$ ou

$$\Gamma\Gamma^* = \Gamma_y\Gamma_y^* + (\Gamma_y^*\eta + \Gamma_y\eta^*)\chi' + j(\Gamma_y^*\eta - \Gamma_y\eta^*)\chi'' + \eta\eta^*(\chi'^2 + \chi''^2). \quad (2)$$

A. Étude lorsque la cavité est à la résonance ($y=0$).

— 1° La cavité est adaptée au guide : $\alpha = 1$.

On a alors

$$\Gamma_y = \Gamma_0 = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma\Gamma^* = \eta\eta^*(\chi'^2 + \chi''^2).$$

On obtient un signal proportionnel au module de χ^2 , ce qui dans le cas de χ très faible donne une mauvaise sensibilité.

2° α est différent de 1. Nous supposons χ très faible et négligerons les termes en $\chi'^2 + \chi''^2$. On obtient alors

$$\Gamma\Gamma^* = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha k(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3} \chi''.$$

Le signal de basse fréquence est linéaire en χ'' et est maximum lorsque $\alpha = \alpha_0 = 2 - \sqrt{3}$ (la puissance réfléchie est alors le tiers de la puissance incidente). La détection est une détection homodyne et un simple cristal détecteur donne une bonne sensibilité.

B. — Étude du cas $\alpha = \alpha_0$ lorsque la cavité est désaccordée ($y \neq 0$). — On obtient un signal de basse

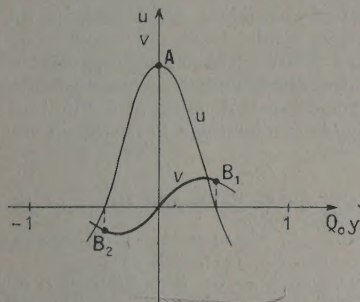


Fig. 2.

fréquence qui est la superposition d'un signal d'absorption u et d'un signal de dispersion v ; la formule (2) donne en effet en négligeant encore les termes en $\chi'^2 + \chi''^2$

$$\Gamma\Gamma^* = \Gamma_y\Gamma_y^* + u + v,$$

avec

$$u = \frac{4\alpha k(1-\alpha^2 - 4Q_0^2 y^2)}{[(1+\alpha)^2 + 4Q_0^2 y^2]^2} \chi''$$

et

$$v = \frac{8\alpha k Q_0 y}{[(1+\alpha)^2 + 4Q_0^2 y^2]^2} \chi'.$$

Si l'on admet des valeurs comparables pour χ' et χ'' et avec la valeur α_0 de α , les courbes donnent u et v en fonction de $Q_0 y$ ont l'allure de la figure 2.

Ces courbes permettent de mettre en évidence les faits suivants :

1° Il y a un point A où l'on peut observer l'absorption pure χ'' et deux points B₁ et B₂ où l'on peut observer la dispersion pure χ' . Les deux phénomènes peuvent être observés par simple changement de fréquence de l'oscillateur.

2° Entre les points A et B₁ et A et B₂ le signal obtenu est un mélange d'absorption et de dispersion, l'apparition du signal de dispersion compense la diminution du signal d'absorption : ceci donne au montage, lorsqu'il ne s'agit que de détecter de très faibles paramagnétismes et non d'étudier la forme exacte des courbes une très bonne stabilité, meilleure en particulier que dans le cas d'une détection linéaire (réception superhétérodyne). Dans ce dernier cas, il faut d'ailleurs utiliser un pont pour séparer χ' et χ'' et il y a intérêt à diminuer Γ_y pour ne pas saturer le récepteur, donc à adapter la cavité au guide ($\alpha = 1$).

Les considérations théoriques précédentes ont été vérifiées sur le spectromètre pour résonance paramagnétique de l'École de Physique et de Chimie.

Je veux remercier ici M. Lucas pour les conseils précieux qu'il a bien voulu me donner.

Manuscrit reçu le 30 octobre 1954.

[1] COMBRISSEON et UEBERSFELD. — *J. Physique Rad.*, 1953, 14, 724.

PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES EN ONDES CENTIMÉTRIQUES DE L'EAU ADSORBÉE SUR GEL DE SILICE

Par Jean LE BOT et Serge LE MONTAGNER,

Laboratoire de Physique,
Faculté des Sciences de Rennes.

Des études diélectriques de l'eau adsorbée sur gel de silice ont été récemment effectuées par plusieurs auteurs [1], [2], [3], [4], [5], [6]; toutefois, la distinction suivante n'a pas toujours été nettement faite : il existe pour l'eau adsorbée sur gel de silice deux régions de dispersion diélectrique; à 10 kHz par exemple [5], [6] l'une se trouve au voisinage de la température ambiante (région 1) et l'autre vers -100°C (région 2).

La plupart des travaux effectués à ce jour ont porté sur l'étude de la région 1. Il semble maintenant assez bien acquis [7] que l'absorption diélectrique observée dans la région 1 est du type Maxwell-Wagner et a pour origine l'hétérogénéité du diélectrique formé par les grains de gel adsorbant et les couches d'eau fixées.

La région 2 a été étudiée à Rennes [5], [6] en ondes kilométriques, en opérant sur l'actigel Prolabo, hydraté à saturation à 70 % H. R. Le report, dans le diagramme $\log v_c \frac{1}{T}$, [1], [8] des points ainsi obtenus, donne une droite vérifiant une formule du type $v_c = A \exp\left(-\frac{U}{RT_c}\right)$ où v_c et T_c désignent la fré-

quence et la température absolue du maximum de ε'' . Le prolongement de cette droite vers la région des ondes centimétriques faisait prévoir, pour ces fréquences, l'existence de bandes au voisinage de la température ambiante. Nos expériences en ondes centimétriques ont permis de déterminer la position de ces bandes.

Dans un précédent article [3] nous avons présenté des résultats de mesure de constantes diélectriques complexes, en fonction de la fréquence de 3 000 à 25 000 MHz, relatives à l'actigel; les courbes $\varepsilon'' = f(\nu)$ présentaient un maximum vers 17 000 MHz pour la température de + 20° C. Le manque de source à cette fréquence ne nous avait pas permis de fixer avec plus de précision la position de ce maximum.

Disposant d'une nouvelle méthode de mesure des constantes diélectriques en ondes centimétriques [9] particulièrement adaptée à l'étude des substances adsorbantes, nous avons cherché, en opérant à fréquence fixe (2 891 MHz, $\lambda = 10,37$ cm) à faire apparaître la bande, précédemment observée en variation de fréquence à l'aide d'une variation thermique d'amplitude modérée. La courbe $\varepsilon'' = f(T)$ obtenue (fig. 1),

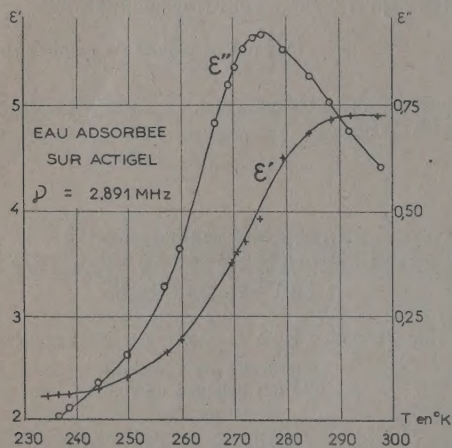


Fig. 1.

présente à 276°K, un maximum très net du type Debye, la courbe étant toutefois légèrement dissymétrique par suite de l'influence de la région 1.

Le report de ces deux résultats dans la diagramme $\log \nu_c \frac{1}{T}$ (fig. 2) fournit des points s'alignant avec ceux obtenus en ondes kilométriques [5], [6], pour le gel dans les mêmes conditions vérifiant ainsi dans un très large domaine spectral, la formule $\nu_c = A \exp\left(-\frac{U}{RT_c}\right)$.

On peut alors déduire de ce diagramme, l'énergie d'activation moyenne de l'eau adsorbée : $U = 12,5$ kcal/mol et l'ordonnée à l'origine de la droite $A = 10^{10,8}$. Remarquons que c'est une coïncidence purement accidentelle si la droite relative

à l'eau adsorbée coupe celle relative à l'eau (représentée également sur la figure 2 [10]) dans la région des ondes centimétriques.

Il semble donc que la dispersion diélectrique observée dans la région 2 est bien du type Debye, mais il

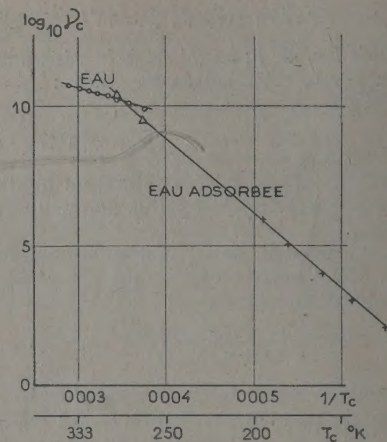


Fig. 2.

est encore difficile d'interpréter théoriquement la valeur élevée de U qui est de l'ordre de celle de la glace et le fort coefficient A qui suggère un temps de relaxation très faible. Dans un prochain article, nous présenterons les résultats expérimentaux de mesures de constantes diélectriques en ondes centimétriques, effectuées sur des gels de silice et d'alumine, en faisant varier de façon systématique la teneur en eau adsorbée.

- [1] FREYMAN M. et FREYMAN R. — C. R. Acad. Sc., 1951, **232**, 1096.
FREYMAN M., ROLLAND M. T. et FREYMAN R. — C. R. Acad. Sc., 1951, **232**, 2312.
- [2] KAMIYOSHI K. I. — Sc. Rep. Ritu, 1951, **3**, 513.
KAMIYOSHI K. I. — Otake T. Sc. Rep. Ritu, 1953, **5**, 271.
KAMIYOSHI K. I. — Otake T. J. Chem. Phys., 1953, **21**, 1295.
- [3] LE BOT J. et LE MONTAGNER. — C. R. Acad. Sc., 1951, **233**, 862.
- [4] MC INTOSH R., JOHNSON M. S., HOLLIES N. et MC LEOD L. — Can. J. Research, 1947, **25**, 566.
MC INTOSH R., RIDEAL E. K. et SNELGROVE F. — Proc. Roy. Soc., 1951, **208**, 292.
- [5] ROLLAND M. T. et BERNARD R. — C. R. Acad. Sc., 1951, **232**, 1098.
- [6] TIENNOT. — Diplôme d'Études supérieures, Rennes, 1952 (tirage limité).
- [7] HEUKELON W. et VAN REIJEN L. L. — Comptes rendus de la 4^e réunion de Chimie physique, Paris, 1954.
- [8] FREYMAN M. et FREYMAN R. — J. Physique Rad., 1954, **15**, 165.
- [9] LE BOT J. et LE MONTAGNER S. — C. R. Acad. Sc., 1953, **236**, 469.
- [10] HASTED J. B. — Communication privée.